Lista de Exercícios de Cálculo 2
Módulo 1 - Primeira Lista - 01/2017

1. Determine se a seqüência converge ou diverge; se convergir, ache o limite.
   (a) $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$ (b) $\left\{\frac{\arctan(n)}{n}\right\}$ (c) $\left\{\frac{1,0001^n}{1000}\right\}$ (d) $\left\{(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}\right\}$
   (e) $\left\{\frac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$ (f) $\left\{\frac{4n^2+1}{2n^2-1}\right\}$ (g) $\left\{\frac{\cos(n)}{n}\right\}$ (h) $\{e^{-n}\ln(n)\}$
   (i) $\{(-1)^n n^3 3^{-n}\}$ (j) $\left\{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ (k) $\{n^{1/n}\}$ (l) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$
   (m) $\left\{(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right\}$ (n) $\left\{\frac{\sin(n)}{n}\right\}$ (o) $\{(n+4)^{1/(n+4)}\}$ (p) $\{8^{1/n}\}$

2. Considere a sequência $\{x_k\}$ definida pela recorrência $x_{k+1} = x_k - \tan x_k$. Supondo que a sequência convirja para $\lim x_k = L$, mostre que $L = \pi s$, para algum inteiro $s \in \mathbb{Z}$.

3. Uma sequência de números racionais é descrita como
$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots.$$
   Aqui o numerador forma uma sequência, o denominador forma uma segunda sequência e as razões formam uma terceira sequência. Sejam x_n e y_n, respectivamente, o numerador e o denominador da n-ésima fração $r_n = x_n/y_n$.

   (a) Verifique que $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$, $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ e, mais geral, se $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, então $(a+2b)^2 - (a+b)^2 = \mp 1$.
   (b) As frações $r_n = x_n/y_n$ se aproximam de um limite quando n aumenta. Qual é esse limite?

4. Utilize séries conhecidas, convergentes ou divergentes, para determinar se a série é convergente ou divergente, no caso da convergência, determine a soma.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[2^{-n} - 2^{-3n}\right]$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{8^n}\right]$

5. Verifique que a função determinada pelo n-ésimo termo da série verifica a hipótese do teste da integral e use o teste para verificar a convergência das séries.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ (d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^2}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)^2}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sech}^2(n)$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\arctan(n)}{1+n^2}$

6. Utilize o *teste da comparação* para determinar a convergência das séries abaixo.
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos(n)}{n^2}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n2^n}$ (g) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\tanh(n)}{n^2}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

7. Utilize o *teste da razão* para determinar a convergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

8. Utilize o *teste da raiz* para determinar a convergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(\ln(n))^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(n)}\right)^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln(n))^{n/2}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

9. Determine se as séries verificam as condições do teste das séries alternadas, além disso verifique a convergência.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+7}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{5^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(1+e^{-n})$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{e^{2n}+1}{e^{2n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}10^{1/n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sin(n)}{n^2}$

10. Determine se as séries são absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{1}{n^{2/3}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n^3+1}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{\cos(\pi n)}{n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\operatorname{sech}(n)$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{\ln(n)}{n-\ln(n)}$

Gabarito

1. Respostas

   (a) Converge

   (b) A função $\arctan x$ é limitada por $\pm\pi/2$. Assim, $-\dfrac{\pi}{2n} \leq \dfrac{\arctan x}{n} \leq \dfrac{\pi}{2n}$. Pelo teorema do sanduíche a sequência é convergente, pois $\pm\dfrac{\pi}{2n} \to 0$, logo $\dfrac{\arctan n}{n} \to 0$.

   (c) Diverge

   (d) Converge

   (e) Diverge

   (f) Converge

   (g) Converge

   (h) Converge

   (i) Converge

   (j) Converge

   (k) Converge

   (l) Facilmente se verifica que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$. Portanto, a sequência é convergente.

   (m) Como $\sqrt{n^2+n} - n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \to \dfrac{1}{2}$. Não é possível verificar a convergência da sequência $(-1)^n(\sqrt{n^2+n}-n)$. Pois, fazendo $n \to \infty$, o valor da sequência ficaria oscilando nas proximidades dos números $\pm 1/2$. Logo, a sequência diverge.

   (n) Converge

   (o) Converge

   (p) Converge

2. Quando $n \to \infty$ a sequência $x_n \to L$, ou seja, no infinito a relação de recorrência $x_{k+1} = x_k - \tan x_k$ é da forma $L = L - \tan L$. Portanto $L = \pi s$, em que $s \in \mathbb{Z}$.

3. Respostas

   (a) Supondo que $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, tem-se que $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = -(a^2 - 2b^2) = \mp 1$.

   (b) Como $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = \mp 1$, então $\dfrac{(a+2b)^2}{(a+b)^2} - 2 = \mp\dfrac{1}{(a+b)^2}$. Definido $r_n = x_n/y_n$, tem-se que $r_n^2 - 2 = \mp\dfrac{1}{y_n^2}$. Sabe-se que a sequência y_n é crescente e que $y_n \to +\infty$. Logo, $r_n^2 - 2 \to 0$, ou seja $r_n \to \sqrt{2}$.

4. Respostas

   (a) Converge

   (b) Diverge

   (c) Converge

   (d) Converge

5. Respostas

   (a) Converge

   (b) Diverge

(c) Diverge

(d) Converge

(e) O termo geral da série $a_n = n \tan(1/n)$ é decrescente. Mas, $a_n \to 1$ quando $n \to \infty$. Portanto, a série diverge.

(f) Converge

(g) Como $f(x) = \text{sech}^2 x = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ é uma função contínua e decrescente, pode-se aplicar o teste da integral. Assim, $\displaystyle\int_1^\infty \text{sech}^2 x dx = \tanh x|_1^\infty = 1 - \tanh 1$. Portanto, a série converge.

(h) Converge

6. Respostas

(a) Converge

(b) Converge

(c) Diverge

(d) $n! \geq n^2$ para todo $n \geq 4$. Assim, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 4$. Como a série dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, pelo teste da comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

(e) Diverge

(f) Converge

(g) Converge

(h) A soma dos primeiros n números ao quadrado é dado por $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Logo, a série pode ser reescrita na forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$. Como $\dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} \leq \dfrac{6}{n^3}$ e a série dada por $\sum \dfrac{6}{n^3}$ é convergente, tem-se, pelo teste da comparaçao, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ também é convergente.

7. Respostas

(a) Converge

(b) Converge

(c) Converge

(d) Diverge

(e) Converge

(f) Converge

(g) Diverge

(h) Pelo teste da razão, tem-se que $\dfrac{(n+1)!}{n!} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{(1+1/n)^n} \to \dfrac{1}{e} < 1$. Portanto, a série converge.

8. Respostas

(a) Converge

(b) Converge

(c) Converge
(d) Diverge
(e) Neste caso, o teste da raiz não se aplica, pois $\sqrt[n]{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} = \left(1-\frac{3}{n}\right) \to 1$. No entanto, o termo geral da série $a_n = \left(1-\frac{3}{n}\right)^n \to e^{-3} \neq 0$. Portanto, a série diverge.
(f) Converge
(g) Converge
(h) Diverge

9. Respostas

(a) Converge
(b) Converge
(c) Diverge
(d) Diverge
(e) Transformando o termo geral da sequência em uma função real, tem-se que $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$. Derivando, se verifique que $f'(x) = \frac{-x-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0$ para $x \geq 1$. Ou seja, a função $f(x)$ é decrescente para $x \geq 1$. Como $f(x) \to 0$ quando $x \to \infty$, conclui-se, pelo teste de Leibniz, que a série dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ é convergente.
(f) Converge
(g) Diverge
(h) Converge

10. Respostas

(a) Diverge
(b) Condicionalmente Convergente
(c) Condicionalmente Convergente
(d) Absolutamente Convergente
(e) Absolutamente Convergente
(f) Condicionalmente Convergente
(g) Absolutamente Convergente
(h) É possível mostrar que a seqüência dos termos gerais é decrescente para $n \geq 4$ e que $\frac{\ln n}{n - \ln n} \to 0$. Ou seja, a série alternada é convergente. Sabe-se, ainda, que $n - \ln n \leq n + \ln n \leq n + n = 2n$. Assim, $\frac{\ln n}{n-\ln n} \geq \frac{\ln n}{2n}$. Como a série dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n}$ é divergente, tem-se que $\sum \left|(-1)^n \frac{\ln n}{n-\ln n}\right| \geq \sum \frac{\ln n}{2n}$ também é divergente. Logo, a série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$ é condicionalmente convergente.