



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Curso de Engenharia Automotiva**

**TÉCNICAS LINEARES DE IDENTIFICAÇÃO DE
FORÇAS PARA SISTEMAS AUTOMOTIVOS**

**Autor: Eduardo Ladeira Cotta
Orientador: Prof. Dr. Henrique Gomes de Moura**

**Brasília, DF
2017**



Eduardo Ladeira Cotta

**TÉCNICAS LINEARES DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS PARA SISTEMAS
AUTOMOTIVOS**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Automotiva da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Automotiva.

Orientador: Professor Doutor Henrique Gomes de Moura

Co-Orientador: Professor Doutor Edson Alves da Costa Júnior

**Brasília, DF
2017**

CIP – Catalogação Internacional da Publicação*

Ladeira Cotta, Eduardo.

Técnicas Lineares de Identificação de Forças para
Sistemas Automotivos: Subtítulo / Eduardo Ladeira
Cotta. Brasília: UnB, 2017. 103 p. : il. ; 29,5 cm.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília
Faculdade do Gama, Brasília, 2017. Orientação: Prof. Dr.
Henrique Gomes de Moura.

1. Palavra Chave. 2. Palavra chave. 3. Palavra chave3 I.
Gomes de Moura, Henrique. II. Técnicas Lineares de
Identificação de Forças para Sistemas Automotivos.

CDU Classificação



TÉCNICAS LINEARES DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS PARA SISTEMAS AUTOMOTIVOS

Eduardo Ladeira Cotta

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Automotiva da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em 30/06/2017 apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. Dr.: Henrique Gomes de Moura, UnB/ FGA
Orientador

Prof. Dr.: Edson Alves da Costa Júnior, UnB/ FGA
Co-orientador

Profa. Dra.: Suzana Moreira Ávila, UnB/ FGA
Membro Convidado

Brasília, DF
2017

Esse trabalho é dedicado às crianças adultas que quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

O homem é a medida de todas as coisas.
Protágoras.

***RESUMO**

Palavras-chave:

ABSTRACT

Keywords:

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO	Erro! Indicador não definido.
1.2 OBJETIVOS	Erro! Indicador não definido.
1.3 RESULTADOS ALCANÇADOS	Erro! Indicador não definido.
1.4 ORGANIZAÇÃO DE CAPÍTULOS	
2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	Erro! Indicador não definido.
2.1 FORÇAS OPERACIONAIS EM SISTEMAS AUTOMOTIVOS	Erro! Indicador não definido.
2.2 TÉCNICAS DE MODELAGEM DE SISTEMAS MECÂNICOS	Erro! Indicador não definido.
2.2.1 Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	Erro! Indicador não definido.
2.2.1.1 Propriedades básicas	Erro! Indicador não definido.
2.2.1.2 Conceitos básicos em análise modal	Erro! Indicador não definido.
2.2.1.3 Modelos transientes	Erro! Indicador não definido.
2.2.1.4 Função de transferência	Erro! Indicador não definido.
2.2.1.5 Aplicando um sinal senoidal a um SLID	Erro! Indicador não definido.
2.2.1.6 Relação entre convolução e Furrier	Erro! Indicador não definido.
2.3 MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE FORÇAS	Erro! Indicador não definido.
2.3.1 COMPARAÇÃO ENTRE DIFERENTES CLASSES DE MODELO	Erro! Indicador não definido.
2.3.2 MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO EM SÉRIES ORTOGONAIS....	Erro! Indicador não definido.
2.3.3 TPA: MÉTODO DA RIGIDEZ COMPLEXA E MÉTODO DA INVERSÃO DE MATRIZES	Erro!
Indicador não definido.	
2.3.4 SWAT	Erro! Indicador não definido.
3 MODELOS DINÂMICOS PARA VEÍCULOS	Erro! Indicador não definido.
3.1 DEFINIÇÃO DE ALGUMAS VARIÁVEIS BÁSICAS	Erro! Indicador não definido.
3.2 MODELOS COM UM GRAU DE LIBERDADE	Erro! Indicador não definido.
3.4 MODELOS COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE	Erro! Indicador não definido.
3.5 MODELOS COM SETE GRAUS DE LIBERDADE	Erro! Indicador não definido.
4 MODELO PROPOSTO COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE	Erro! Indicador não definido.
definido.	
5 VERIFICAÇÃO DO MODELO COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE	Erro! Indicador não definido.
definido.	
6 APLICAÇÃO DO SWAT AO MODELO PROPOSTO	Erro! Indicador não definido.
7 TRABALHOS FUTUROS	Erro! Indicador não definido.
8 CONCLUSÃO	Erro! Indicador não definido.
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	Erro! Indicador não definido.
ANEXOS	57

1. INTRODUÇÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso da Faculdade UnB do Gama (FGA) apresenta um breve resumo de algumas técnicas de identificação de forças e seu embasamento teórico assim como uma pequena discussão dos modelos mais comuns utilizados para o estudo dinâmico de veículos. Ao final é apresentado um possível modelo inovador para o referido estudo.

1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO

Ao se iniciar um novo projeto, é de extrema importância ter uma estimativa das forças a quais o sistema será submetido. Para isso o sistema e suas condições de uso devem ser amplamente estudados e analisados. Existem várias técnicas e normas que auxiliam nessa estimativa.

Ao se projetar um cubo de roda para um veículo, por exemplo, diversos parâmetros devem ser estabelecidos e considerados, tais como:

- O peso do veículo;
- O tipo de veículo: de passeio? de carga? de competição?;
- O tipo de terreno que o veículo será utilizado: asfalto liso? terra? misto?;
- Faixa de velocidade, entre outros.

Porém, após o projeto ser realizado, tanto na fase de testes como no uso normal, é de muita valia saber as forças que estão de fato atuando no sistema. A identificação das forças atuantes em um sistema é uma ferramenta muito útil para a verificação e controle do comportamento do sistema em si.

A partir do momento que se tem conhecimento destas forças, é possível aplicá-las a modelos preditivos que estimam o tempo de vida de componentes com base no comportamento dinâmico e nos carregamentos externos aplicados ao sistema. É também possível resolver problemas de otimização e realizar controles de qualidade dos processos de fabricação, tendo conhecimento das forças aplicadas ao sistema. Outras vantagens também são a de poder realizar um controle ativo de vibrações e a identificação de fontes de ruído e vibração.

1.2. OBJETIVOS

1.3. RESULTADOS ALCANÇADOS

1.4. ORGANIZAÇÃO DE CAPÍTULOS

2 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Este capítulo tem como objetivo servir de base contextual e matemática para os capítulos seguintes, tendo como principais assuntos as forças operacionais atuantes em sistemas automotivos e técnicas de modelagem de sistemas mecânicos (abrangendo sistemas lineares invariantes no tempo e métodos de identificação de forças).

Normalmente, pode-se dividir um veículo em sete grandes sistemas automotivos (ver Fig. 2.1) e cada um desses sistemas em vários outros subsistemas. Como a motivação deste estudo parte da dinamicidade de carros de corrida e, o estudo de cada um dos sistemas e subsistemas é de alta complexidade e extenso, este trabalho propõe um foco nos principais sistemas atuantes na dinâmica veicular. Assim sendo, serão estudados principalmente o sistema de suspensão e o *body* (carroceria) do veículo com algumas referências aos sistemas de freio e transmissão.

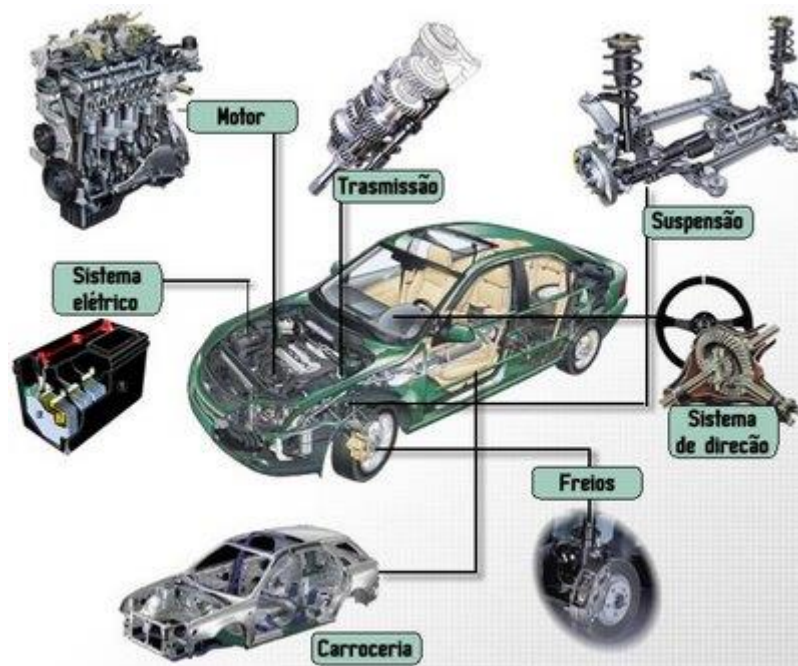


Figura 2.1 – Sistemas automotivos

2.1 FORÇAS OPERACIONAIS EM SISTEMAS AUTOMOTIVOS

Neste tópico serão investigados alguns esforços decorrente da movimentação do veículo e da atuação de alguns dos sistemas automotivos em estudo. Estes esforços estão divididos nas seguintes categorias:

- De interação entre subsistemas e partes móveis: atrito, vibrações mecânicas, pressão sonora;
- De campo: gravidade associada ao peso dos componentes;
- De inércia: Einstein, Centrífuga, Euler;

2.1.1 Forças de interação

São forças que resultam da interação entre dois ou mais corpos. As mais relevantes para este trabalho são as forças de atrito, as vibrações mecânica e a pressão sonora.

2.1.1.1 Atrito

A força de atrito é gerada pela rugosidade dos corpos em contato, é sempre tangencial às superfícies em interação e contrária ao movimento relativo entre eles (Moysés, 2002). Existem dois tipos de atrito a serem considerados: o estático, onde não há velocidade relativa entre os corpos em contato e, atrito dinâmico, onde há velocidade relativa entre os corpos devido a um deslizamento das superfícies de contato (Fig. 2.2).

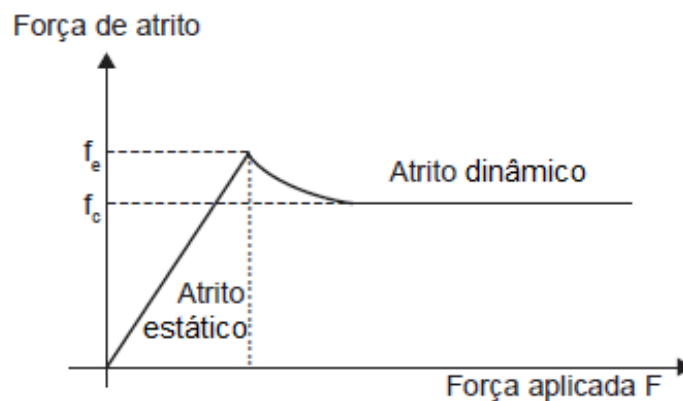


Figura 2.2 – Variação do atrito em função da força aplicada.

A força de atrito é definida por:

$$F_a = \mu \cdot N \quad (2.1)$$

Onde:

F_a , é a Força de atrito;

μ , é o coeficiente de atrito estático ou dinâmico. Característica do material;

N , é a força normal resultante do contato dos corpos.

2.1.1.2 Vibração mecânica

“Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado *vibração* ou *oscilação* (Rao, 2009)”. A vibração de um sistema consiste transferência alternada de sua energia potencial para a cinética e vice-versa. Quando o sistema é amortecido, a cada ciclo de vibração parte dessa energia é dissipada. Normalmente, molas ou a elasticidade do material armazenam a energia potencial do sistema e a massa ou a inercia do corpo armazenam a energia cinética. Os amortecedores servem como um meio de perda gradual de energia. (Rao, 2009).

Os graus de liberdade de um sistema (GDL) é a quantidade mínima de coordenadas independentes necessárias para determinar completamente as posições de todas as partes do sistema em estudo a qualquer instante (Rao, 2009). Como exemplo, a Fig. (2.3) mostra um sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade. Isso porque o sistema precisa de duas coordenadas independentes ($x_1(t)$ e $x_2(t)$) para a posição das partes do sistemas possam ser determinadas completamente.

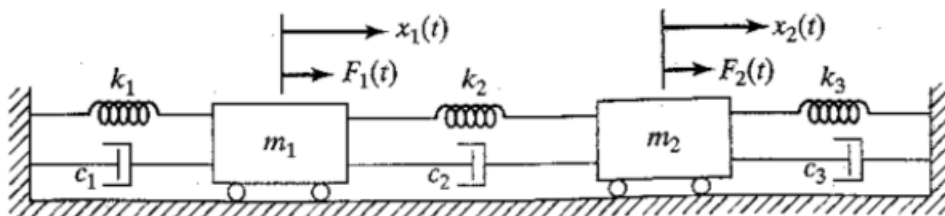


Figura 2.3 – Sistema massa-mola-amortecedor com 2 GDL.

As molas armazenam a energia potencial e sua rigidez é normalmente representada como “ k ”. Os coeficientes de amortecimento são representados como “ c ” e são responsáveis pela maior dissipação de energia do sistema. A massa “ m ” armazena a energia cinética e as forças externas são representadas por “ F ”. O

movimento do sistema é descrito por um somatório de forças, representado genericamente pela Eq. (2.2) onde a primeira parcela representa a força inercial do sistema, a segunda a força dissipada pelo amortecedor e a terceira a força relativa à Lei de Hooke.

$$[m]_{n \times n} \ddot{\vec{x}}_n(t) + [c]_{n \times n} \dot{\vec{x}}_n(t) + [k]_{n \times n} \vec{x}_n(t) = \vec{F}_n(t) \quad (2.2)$$

As matrizes são quadradas e o valor índice “ n ” (que determina o tamanho das matrizes e vetores) é igual ao número de graus de liberdade do sistema. No caso do sistema da Fig. (2.3), a equação do movimento é:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

As vibrações mecânicas em veículos são normalmente geradas pela interação dos pneus com a pista, pelo desbalanceamento das rodas e pneus, pelo motor e sistema de transmissão. Essa vibração pode causar a fadiga de componentes, desconforto aos passageiros e ser nociva às cargas.

2.1.1.3 Pressão sonora

Em um veículo, as pressões sonoras notáveis são normalmente provenientes dos sistemas de admissão e exaustão dos gases do motor, do atrito entre peças e vibração de componentes assim como do contato entre o pneu e o solo. Essas pressões, que nada mais são do que ruídos, podem ser desconfortáveis para os ocupantes do veículo e indesejadas como também podem servir de sinalizadores de que algum sistema está com mal funcionamento ou desgaste de componentes.

Como a pressão sonora não influencia significativamente a dinâmica do veículo, não entraremos em mais detalhes sobre o assunto.

2.1.2 Forças de Campo

Existem diversas forças de campo (atração, repulsão, ligações atômicas, etc.) mas para o intuito deste trabalho a mais relevante é a força gravitacional. A força gravitacional resulta da atração entre massas, neste caso a massa da terra e a massa

do veículo e seus componentes. O resultado deste fenômeno é a força peso. O sistema automotivo que atua diretamente com esta força é o sistema de suspensão.

2.1.3 Forças de inércia

De acordo com a Primeira Lei de Newton, “Todo corpo persiste em seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele”. As forças de inércia estão relacionadas diretamente com a massa e as dimensões de um corpo. Para este estudo, serão consideradas três forças de inércia: força centrífuga, força de Einstein e Força de Euler.

2.1.3.1 Força Centrífuga

A força Centrífuga é percebida apenas por observadores em referenciais não-inerciais de movimentos de rotação em relação a um referencial inercial (Moysés, 2002). A Figura (2.4) a seguir mostra um referencial não-inercial (S') sobre uma plataforma girante e um referencial inercial (S).

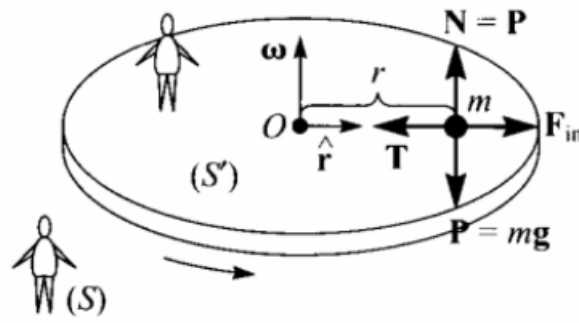


Figura 2.4 – Plataforma girante em referencial não-inercial..

Sobre a plataforma está uma massa “ m ”, em repouso em relação a S' . A massa está presa ao centro da plataforma (origem de S e S') por um fio esticado. Em S , a única força horizontal que atua sobre a massa é a tensão “ T ” do fio. Por outro lado, a massa “ m ” em rotação tem uma aceleração centrípeta dada pela Eq. (2.4).

$$a_c = -\omega^2 r \hat{r} \quad (2.4)$$

onde “ r ” é a distância da origem (O) à massa e “ \hat{r} ” o vetor unitário radial nesta direção. A velocidade angular do corpo é representada por “ ω ”. Voltando para o referencial inercial, pela Segunda Lei de Newton:

$$T = -m\omega^2 r \hat{r} \quad (2.5)$$

Como em S' a massa “ m ” está em equilíbrio, é necessário que atue sobre ela uma força para contrapor “ T ”. Esta força é denominada força centrífuga “ F_{cf} ”.

$$F_{cf} = -ma_c = m\omega^2 r \hat{r} \quad (2.6)$$

de modo que,

$$T + F_{cf} = 0 \quad (2.7)$$

A força centrífuga é o que faz o veículo querer sair pela tangente durante uma curva e o que gera o sub- ou sobre esterçamento do veículo quando a força centrífuga excede a força de atrito entre o pneu e a pista.

2.1.3.2 Força de Einstein e força Euler

A força de Einstein e força Euler não serão amplamente utilizadas no decorrer do trabalho por isso, fica cargo do leitor os estudo e conhecimento das mesmas.

2.1 SISTEMAS AUTOMOTIVOS E SUAS FORÇAS OPERACIONAIS

As seguintes perguntas foram realizadas para identificar as técnicas lineares de identificação de forças cabíveis em cada sistema automotivo:

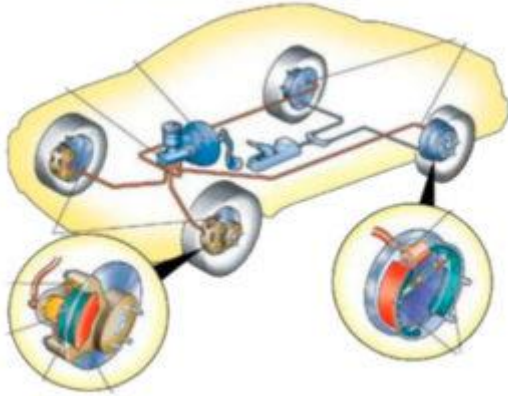
- Quais tipos de esforços operacionais existem?
- Quais tipos de efeitos são gerados?
- Que sinais poderiam ser identificados?
- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?

<http://www.theautopartsshop.com/carsystem/>

Dentre os sistemas listados na figura, foram selecionados para o presente estudo os seguintes sistemas:

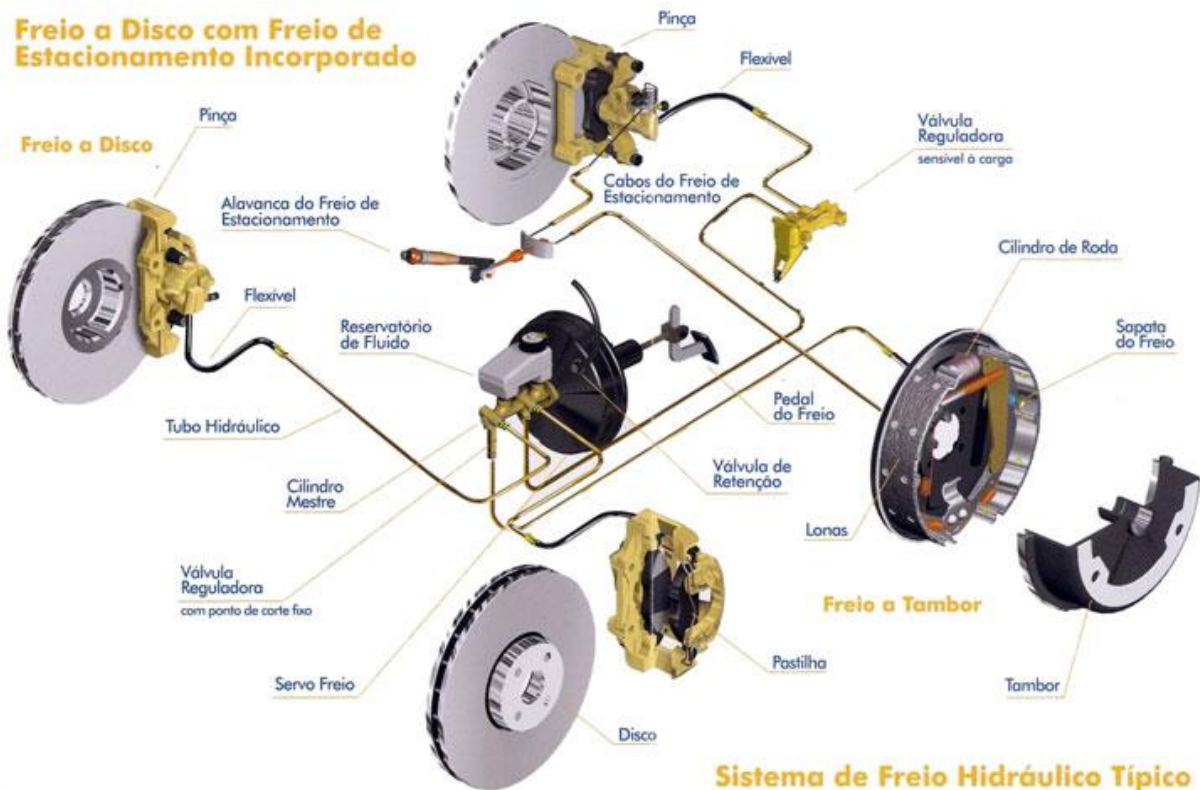
- Sistema de Freio e Pneu (e Pneu)

Sistema de freio



<http://embrefreios.com.br/sistema-de-freios/>

Freio a Disco com Freio de Estacionamento Incorporado



<http://piquetpneus.com.br/freios/>

É o sistema que, juntamente com o pneu, é responsável por retardar ou parar o movimento do veículo. Ao se pressionar o pedal do freio uma pressão hidráulica é gerada forçando o contato entre as pinças de freio e os discos e/ou entre as sapatas do freio e o tambor. Este contato gera um atrito que resulta na desaceleração do veículo.

- Quais tipos de esforços operacionais existem?
 - Força de contato entre pinça e disco, causando atrito que, devido ao raio medido em relação ao centro do movimento, gera um torque de desaceleração do veículo. (Força de contato entre pinça e disco, causando atrito que, devido ao raio medido em relação ao centro do movimento, gera um torque de desaceleração do veículo.)
 - Força de contato entre pneu e pista, provocando a mudança de velocidade do veículo. (Força de contato entre pneu e pista, provocando a mudança de velocidade do veículo.)
 -
- Quais tipos de efeitos são gerados?
 - Aumento da temperatura do sistema;
 - Deslocamento da massa dinâmica;
 - Desaceleração do veículo;
 - Ruídos.
- Que sinais poderiam ser identificados?
 - Aceleração angular da roda;
 - Aceleração linear do veículo;
 - Pressão sonora.
- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?
 - ABS – Sistema antibloqueio dos freios. Impede que as rodas travem em situações de frenagem de emergência.
 - BAS (Mercedes), DBC (BMW), EBA (Range Rover e Ford) – Sistema de assistência a frenagem. Sistema que interpreta o comportamento do motorista, acelera e reforça a aplicação de pressão no freio ao detectar uma pisada rápida no pedal.
 - CBC – Controle de frenagem nas curvas, associado ao ABS.
 - EBD, EBV – Distribuição eletrônica da força de frenagem. Distribui a força de frenagem entre os eixos em função da carga do veículo.
 - HDC – Controle automático de velocidade em descidas íngremes. Atua junto com o ABS para evitar perdas de tração.
 - Sistemas de tração e Estabilidade
 - ABD (Porsche), ADB (BMW), EDL (Audi), EDS (VW) – Diferencial com frenagem automática. Utiliza os circuitos do ABS para frear a roda que patinar primeiro.
 - ATTS (Honda) – sistema ativo de transmissão do conjugado motor. Diferencial auto blocante que distribui um torque variável a cada roda de tração.
 - DSA (Volvo, Opel), VSA (Honda) – assistente dinâmico de segurança. Utiliza o sistema do ABS para corrigir derrapagens laterais.
 - DSC (BMW), DSTC (Volvo), ESP (Mercedes), PSM (Porsche), SVC (Toyota)– Controle dinâmico de estabilidade. Melhora o

comportamento em curvas no caso de subviragem e sobreviragem. Atua junto com ABS.

- Sistema de Suspensão



<http://oficinariviera.com.br/site/dicas/109-sistema-de-suspensao>

É o sistema responsável por garantir o contato dos pneus com a pista e a estabilidade do veículo. Ao mesmo tempo, é também responsável pelo conforto dos ocupantes absorvendo parte dos movimentos da massa não suspensa do veículo. Normalmente é composto molas, amortecedores, barras estabilizadoras e braços de ligação.

- Quais tipos de esforços operacionais existem?

- Força peso;

O sistema suporta toda a massa suspensa do veículo, tanto estática quanto dinâmica, garantido a estabilidade do veículo e conforto dos ocupantes.

- Forças de contato entre pneu e pista.

Pela Terceira Lei, a força de contato entre o pneu e a pista gera impactos verticais que são transmitidos, parcialmente absorvidos, para a carroceria e toda a massa suspensa causando perda de estabilidade e desconforto. (Pela Terceira Lei, a força de contato entre o pneu e a pista gera impactos verticais causando perda de estabilidade e desconforto.)

- Quais tipos de efeitos são gerados?

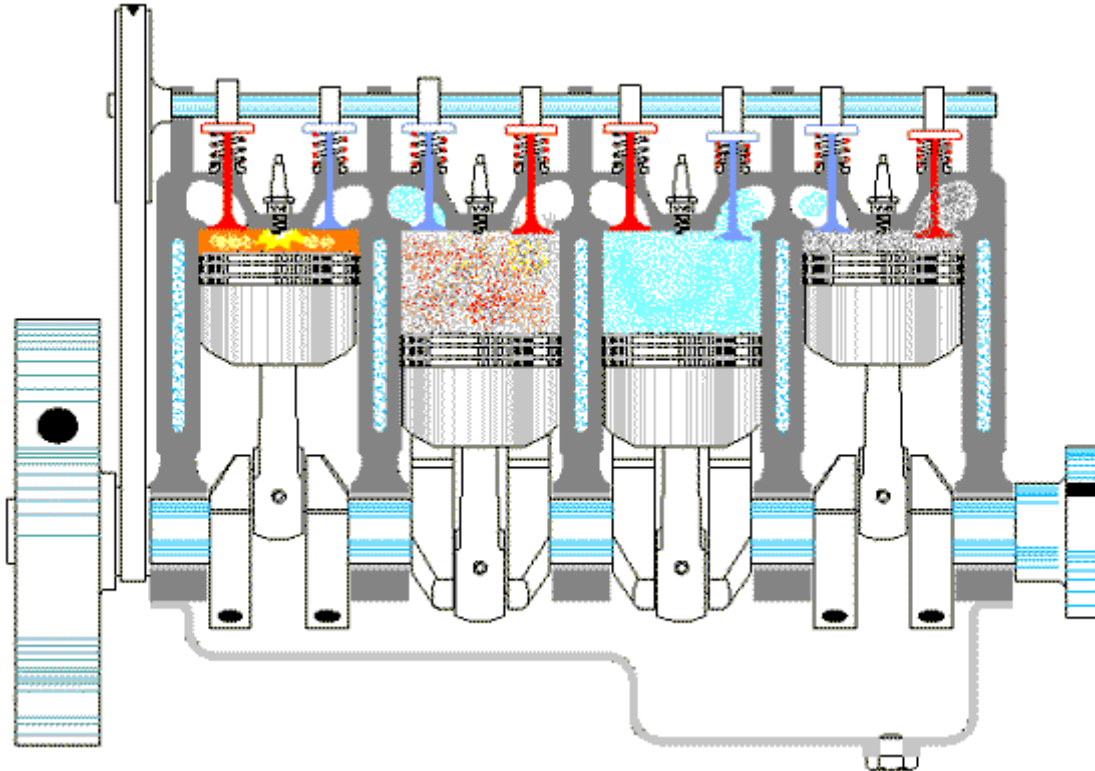
- Deslocamento vertical da massa não suspensa;
- Deslocamento vertical da massa suspensa;
- Rolagem da carroceria.

- Que sinais poderiam ser identificados?

- Vibração;
- Temperatura dos amortecedores;
- Pressão dos sistemas pneumáticos.

- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?
 - Sistemas de tração e Estabilidade
 - ABC (Mercedes Benz), EDC (BMW), CVRSS(GM), CATS (Jaguar), DRC (Audi) – Sistema de suspensão ativa que compensa as oscilações da carroceria durante frenagem, aceleração e curvas.
 - ACE – Controle ativo de rolamento. Sistema automático de estabilização transversal que controla o basculamento lateral da carroceria e ajusta a suspensão de acordo com a tendência do movimento. Mede a aceleração lateral por meio de dois sensores.
 - ADS (Mercedes Benz), ASC (BMW)– Sistema adaptativo de amortecimento de suspensão. Ajusta a dureza da suspensão de forma automática e nivela a altura da carroceria.
 - ARS (BMW) – Controle ativo de estabilização de rolagem. Através de sensores, ativam as barras estabilizadoras transversais que reduzem a rolagem da carroceria.
 - DDS (BMW) – sistema de controle dinâmico de estabilidade. Faz regulagem contínua da rigidez das molas e da dureza dos amortecedores em conjunto com o ARS.
 - RSC (Volvo) – Controle de estabilidade de rolamento. Atua com informações de giroscópios acionando o DSTC para diminuir a aceleração freando seletivamente cada roda e evitando o capotamento.

- Motor (e Motor)



http://autosuporte.blogspot.com.br/2014/01/motores-de-combustao-interna-motor_7.html

O motor é o sistema responsável por gerar a força necessária para acelerar o veículo e manter o mesmo em velocidade de cruzeiro. O motor possui diversos mecanismos rotacionais como polias, eixo virabrequim, eixo de comando de válvulas, volante de inércia e em alguns casos, mecanismos de balanceamento dinâmico. Quando esses mecanismos não estão balanceados, vibrações são geradas causando desconforto e podendo causar a fadiga de algum componente.

A potência do motor é decorrente da combustão interna que ocorrem nos cilindros. A mistura de ar com combustível, juntamente com a compressão da mesma e faíscas de ignição resultam em uma combustão controlada que, devido ao aumento de pressão, movimenta os pistões. Este movimento retilíneo é convertido em movimento rotacional e consequente torque através das bielas e do eixo virabrequim que por seqüência é transmitido pelo sistema de transmissão até as rodas e pneus, movimentando o veículo.

- Quais tipos de esforços operacionais existem?
 - Forças de contato entre os gases de combustão e os pistões. (Forças de contato entre os gases de combustão e a parede interna dos pistões. (Explicar o mecanismo de combustão))
- Quais tipos de efeitos são gerados?
 - Variação na temperatura do motor
 - Variação da temperatura dos gases de exaustão
 - Vibração do motor
 - Efeitos sonoros

- Que sinais poderiam ser identificados?
 - Temperatura na câmara de combustão (mistura ar/combustível);
 - Vibração do bloco do motor;
 - Pressão sonora;
 - Torque de saída no eixo do motor.

- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?
 - Sonda Lambda – controla a mistura ar/combustível.
 - Sensor Knock – detecta, através picos de vibrações, detonações indesejadas na câmara de combustão.

- Sistema de transmissão (Movimento geral do veículo)

- Quais tipos de esforços operacionais existem?
 - Torque gerado no eixo.
 - Aceleração do centro de gravidade do veículo.

- Quais tipos de efeitos são gerados?
 - Torque
 - Ruídos
 - Variação na temperatura do sistema câmbio/diferencial

- Que sinais poderiam ser identificados?
 - Força
 - Vibrações
 - Temperatura
 -

- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?
 - Controle de tração
 - Sensores de Temperatura.

- Sistema de Exaustão

- Quais tipos de esforços operacionais existem?
 - Pressão nas paredes dos tubos.
 - Temperatura elevada

- Quais tipos de efeitos são gerados?
 - Variação de pressão dos gases
 - Variação de temperatura
 - Ruídos/vibração

- Que sinais poderiam ser identificados?

- Pressão dos gases
 - Temperatura
 - Pressão sonora
 - Vibração
- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?
 - Controle de pressão dos gases em motores turbos.

- Body (Carroceria)

- Quais tipos de esforços operacionais existem? Einstein, Contato e Centrífuga
 - Flexão
 - Torção
 - Vibração
 - Ruídos
- Quais tipos de efeitos são gerados?
 - Flexão
 - Torção
 - Vibração
 - Ruídos
- Que sinais poderiam ser identificados?
 - Aceleração
 - Deslocamento
 - Vibração
 - Pressão Sonora
- Existem tecnologias e/ou metodologias aplicadas aos esforços indicados?
 - Suspensão ativa
 - ARS (BMW) – Controle ativo de estabilização de rolagem. Através de sensores, ativam as barras estabilizadoras transversais que reduzem a rolagem d carroceria.
 - DSC (BMW), DSTC (Volvo), ESP (Mercedes), PSM (Porsche), SVC (Toyota)– Controle dinâmico de estabilidade. Melhora o comportamento em curvas no caso de subviragem e sobreviragem. Atua junto com ABS.
 - RSC (Volvo) – Controle de estabilidade de rolamento. Atua com informações de giroscópios acionando o DSTC para diminuir a aceleração freando seletivamente cada roda e evitando o capotamento.

3 MODELOS DINÂMICOS VEICULARES

Um dos grandes desafios ao se modelar um veículo é recriar e interpretar o comportamento dinâmico do mesmo. É muito importante compreender como as

vibrações e forças, decorrentes da locomoção do veículo sobre uma superfície, é transferida para a carroceria. A intensidade e o modo com que esta transferência ocorre determina o conforto e a dirigibilidade do veículo.

Em uma tentativa de se compreender estes fenômenos, alguns modelos são comumente utilizados para a modelagem dinâmica do sistema. Neste capítulo serão apresentados alguns desses modelos (retirar - bastante aplicados assim), bem como uma sugestão de um modelo novo que visa abranger melhor a problemática em casos pré-determinados. (melhorar este texto).

3.1 DEFINIÇÃO DE ALGUMAS VARIÁVEIS BÁSICAS

De acordo com a SAE, são necessários seis (6) graus de liberdade para recriar o comportamento dinâmico da carroceria, como mostra a Figura X.1. Nesta figura, a direção de deslocamento do veículo é no sentido positivo do eixo x enquanto que os pontos 1, 2, 3 e 4 definem a posição das rodas do veículo.

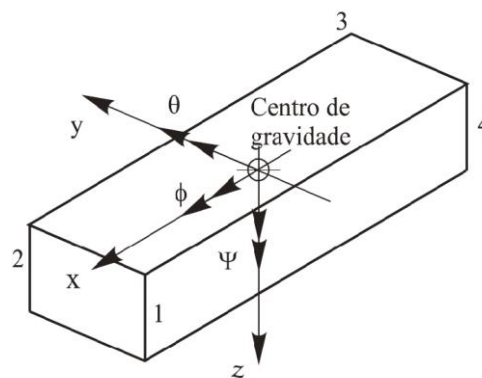


Figura X.1: Sistema de coordenadas e principais graus de liberdade da carroceria de um automóvel.

Onde:

x – deslocamento axial da carroceria;

y – deslocamento transversal da carroceria;

z – deslocamento vertical da carroceria (*bounce*);

ϕ – giro da carroceria em torno do eixo axial, denominado de ângulo de rolamento (*roll*);

θ – giro da carroceria em torno do eixo y , denominado de ângulo de arfagem (*pitch*);

ψ – giro da carroceria em torno do eixo z , denominado de ângulo de guinada (*yaw*).

(COMENTÁRIOS PÉSSOAIS SOBRE ESTE MODELO)

3.2 MODELO COM UM GRAU DE LIBERDADE

3.2 MODELO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

3.2.1 Massa não-suspensa

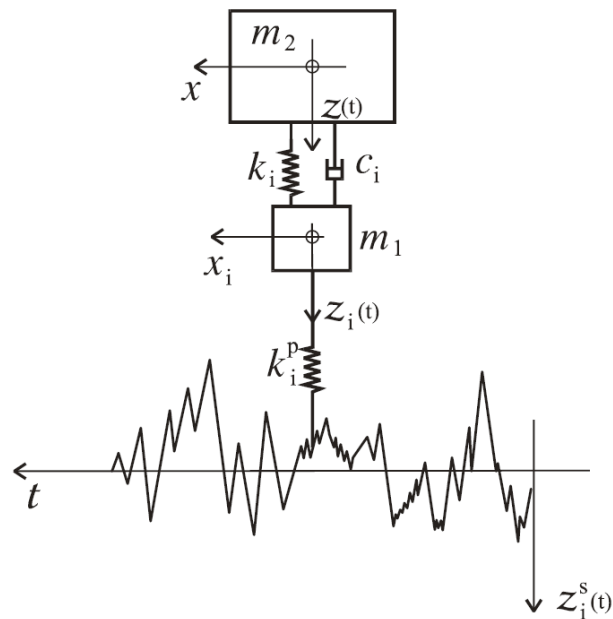


Figura 3.3: Modelo de dois graus de liberdade considerando massa não-suspensa.

Este modelo também é conhecido como modelo de 1/4 do veículo por ser considerado uma roda e a massa respectiva pelo 1/4 do veículo a ser analisado. Com estas considerações a análise dinâmica é feita como sendo um sistema de massas e molas de dois graus de liberdade. Gillespie (1992) acredita ser possível uma análise preliminar de um veículo a partir deste modelo.

m_1 – massa não suspensa referente ao 1/4 de veículo analisado;

m_2 – massa suspensa referente ao 1/4 de veículo analisado;

$z(t)$ – deslocamento vertical da carroceria;

i – indica a posição da roda conforme a Figura X.1;

k_i – rigidez da mola da i '-ésima posição da roda;

c_i – constante de amortecimento da i '-ésima posição da roda;

$z_i(t)$ – deslocamento vertical da massa não suspensa da i '-ésima posição da roda;

k_i^p – rigidez do pneu da i '-ésima posição da roda;

$z_{i(t)}^s$ – deslocamento vertical da superfície sob a i '-ésima roda.

O modelo de 1/4 de veículo é satisfatório para se estudar a nível de componentes, ou seja, como uma análise preliminar do que se esperar do conjunto mola e amortecedor a partir das massas definidas. Porém, ele é INCAPAZ de analisar o comportamento dinâmico veicular, uma vez que este só contempla $\frac{1}{4}$ da massa do veículo, e apenas um dos seis graus de liberdade necessários – parâmetros estabelecido pela SAE. Por este motivo, é mais usada para exposições didáticas do assunto, e modelagens simplificadas de suspensões veiculares.

X.3 – Modelos com sete graus de liberdade

Este modelo é uma tentativa de abranger todas as combinações mais usuais de suspensões para automóveis, sendo elas: veículos com dois eixos rígidos, veículos com suspensão independente na dianteira e eixo rígido na traseira e, veículos com suspensão independente na dianteira e na traseira.

Apesar de ser um modelo complexo com muitos graus de liberdade, o objetivo principal, segundo Nicolazzi [x], é o da melhor representação do comportamento de um veículo transitando em linha reta. Deste modo, mesmo representando sete graus de liberdade, ele abrange apenas três dos seis definidos pela SAE (z , ϕ e θ) deixando de representar o deslocamento axial (x) e transversal (y) da carroceria assim como o ângulo de guinada (ψ) como representados na Figura X.1.

X.3.1 - veículos com dois eixos rígidos

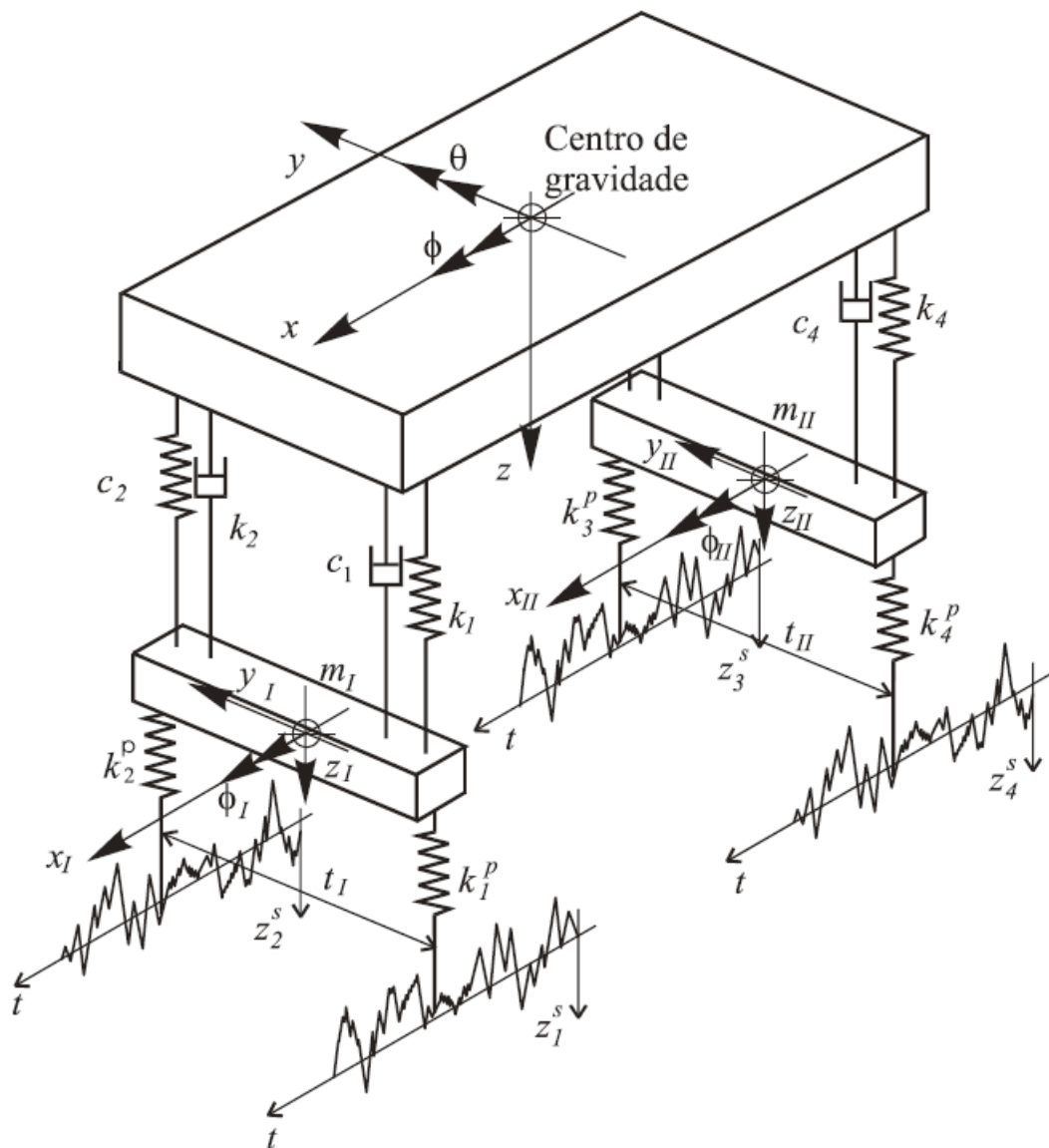


Figura X.3: Modelo de sete graus de liberdade para um veículo com dois eixos rígidos.

Neste modelo os eixos rígidos dianteiro (*I*) e traseiro (*II*) são representados como mostrado na Figura X.3. Suas respectivas massas (m_I e m_{II}), rotações no eixo x (ϕ_I e ϕ_{II}) e deslocamentos verticais (z_I e z_{II}) são levados em consideração. As variáveis t_I e t_{II} representam as distâncias entre as rodas do eixo dianteiro e traseiro respectivamente.

X.3.2 - veículos com suspensão independente na dianteira e eixo rígido na traseira

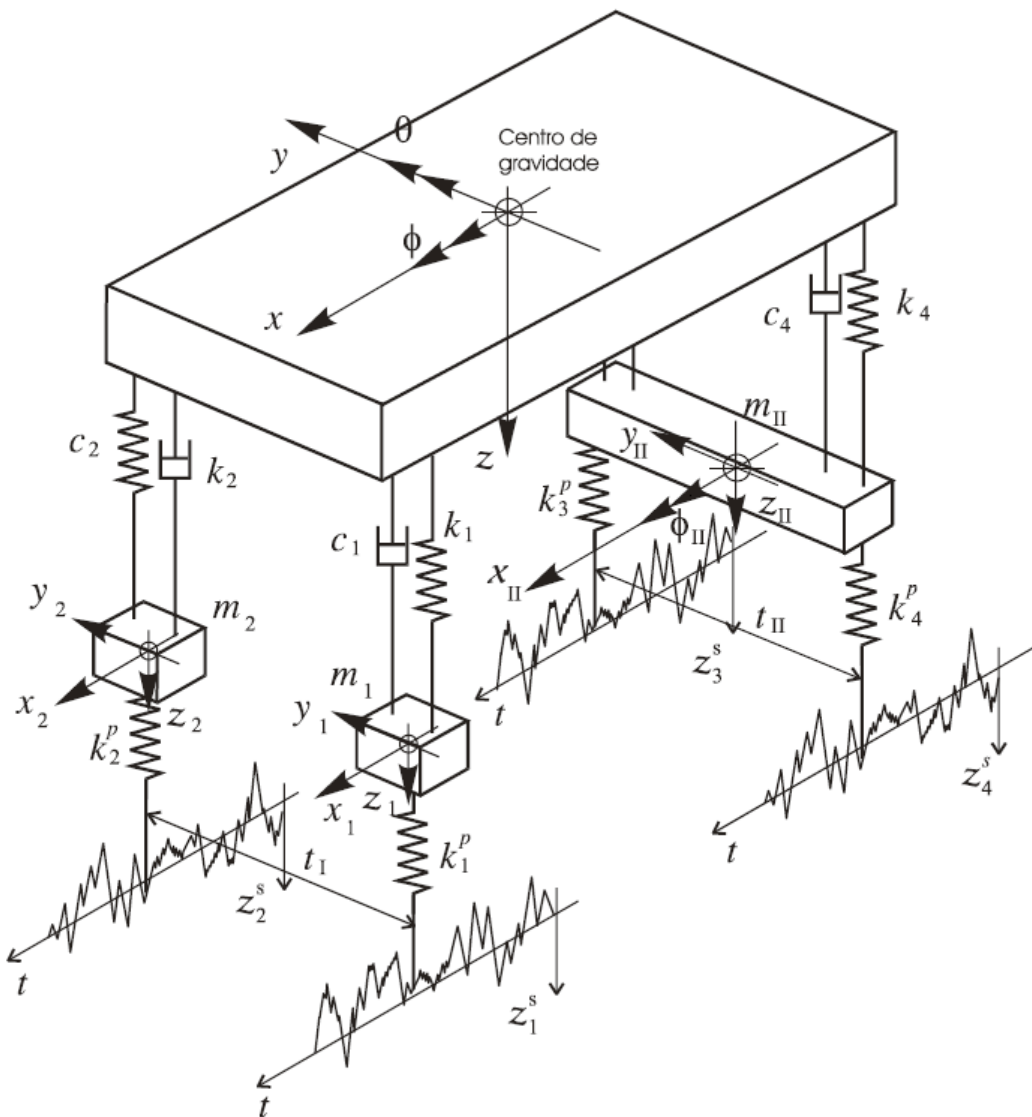


Figura X.4: Modelo de sete graus de liberdade para um veículo com suspensão dianteira independente e eixo traseiro rígido.

Neste modelo o eixo dianteiro é independente e representado por duas massas (m_1 e m_2) e seu respectivos deslocamentos verticais (z_1 e z_2). O eixo traseiro continua rígido como mostra a Figura X.4.

X.3.3 - veículos com suspensão independente na dianteira e na traseira

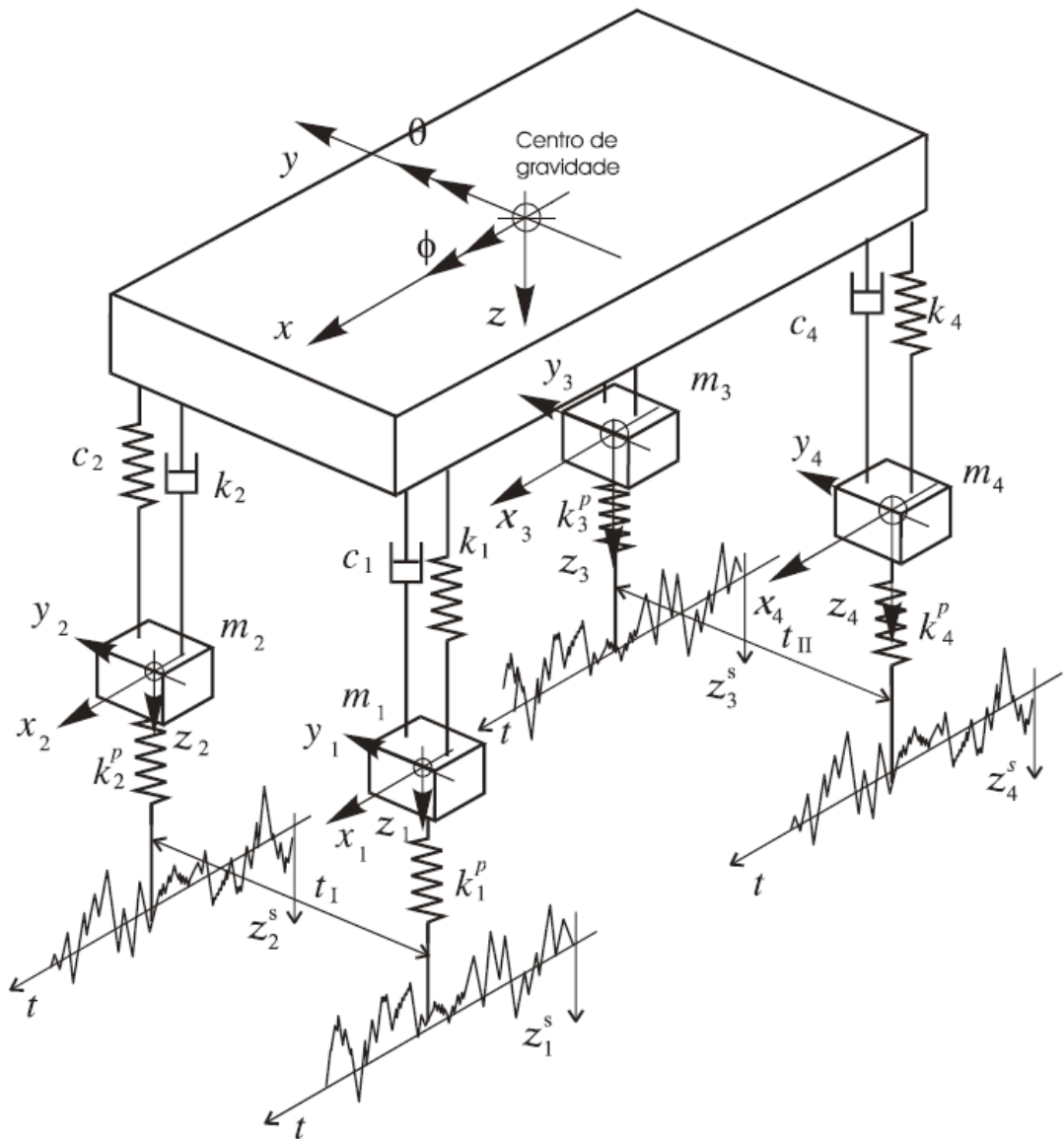


Figura X.5: Modelo de sete graus de liberdade para um veículo com suspensões independentes.

Agora o eixo traseiro também é representado como independente. Representado, assim como o dianteiro, por duas massas (m_3 e m_4) e seus respectivos deslocamentos verticais (z_3 e z_4) como mostra a Figura X.5

X.3 – Modelo proposto

Como dito anteriormente, nenhum dos modelos até agora apresentados abrangem os seis graus de liberdade sugeridos pela SAE, mostrados na Figura X.1. Em uma tentativa de representar com mais fidelidade o comportamento de um veículo transitando, não somente em linha reta como em curvas também, o seguinte modelo é proposto.

4 MODELO PROPOSTO COM SEIS GRAUS DE LIBERDADE

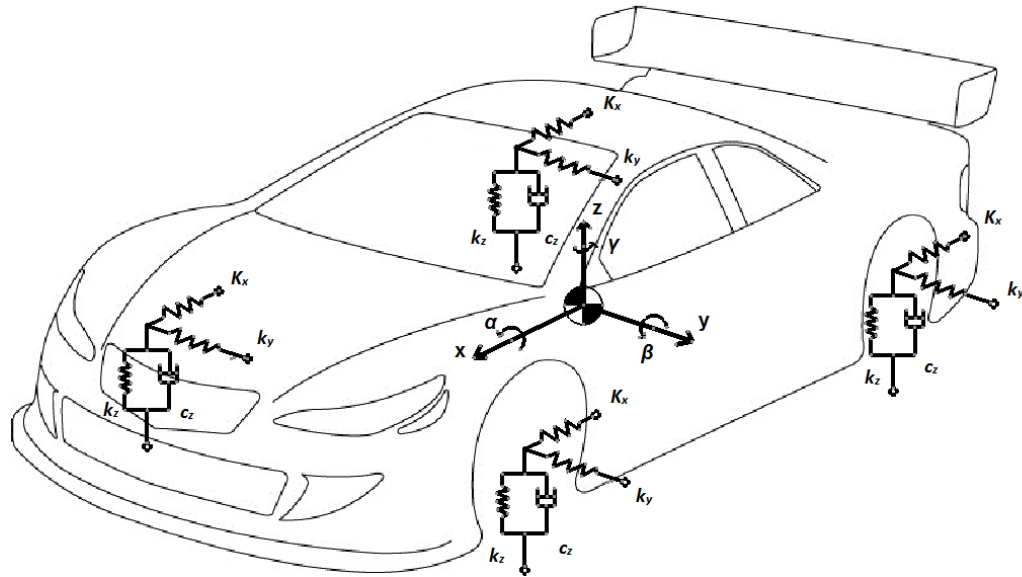


Figura 4.1 – Modelo com 6 GDL

O objetivo deste modelo é descrever o movimento com seis graus de liberdade (6GDL) do centro de gravidade do veículo a partir das coordenadas generalizadas $\{x, y, z, \alpha, \beta \text{ e } \gamma\}$. Estas coordenadas generalizadas se descrevem a partir das translações (x_i, y_i e z_i) de cada ponto de referência adotado nas 4 suspensões (no *Body*, no ponto de acoplamento da suspensão). Em cada ponto de referência são consideradas uma mola nas direções dos eixo x, y e z , como mostra a Figura 4.1. Um amortecedor pode ser considerado na direção z nos pontos de referência embora neste capítulo ele seja a princípio desconsiderado. Os coeficientes de rigidez das molas foram consideradas idênticas para cada eixo generalizado. Na realidade, isto não ocorre, mesmo entre lotes semelhantes de peças.

4.1 DEFINIÇÃO DE PARÂMETROS

Para simplificar a escrita das equações que virão ao decorrer do capítulo, alguns coeficientes foram adotados. As variáveis r, ρ e ϕ representam os valores obtidos entre um segmento que liga a origem (no caso o centro de gravidade do veículo) a um ponto P (pontos de referência), e os eixos cartesianos x, y e z ,

respectivamente. Como visto na Figura 4.2, os sub índices indicam os ângulos formados entre a projeção do seguimento e os eixos que formam o plano da projeção.

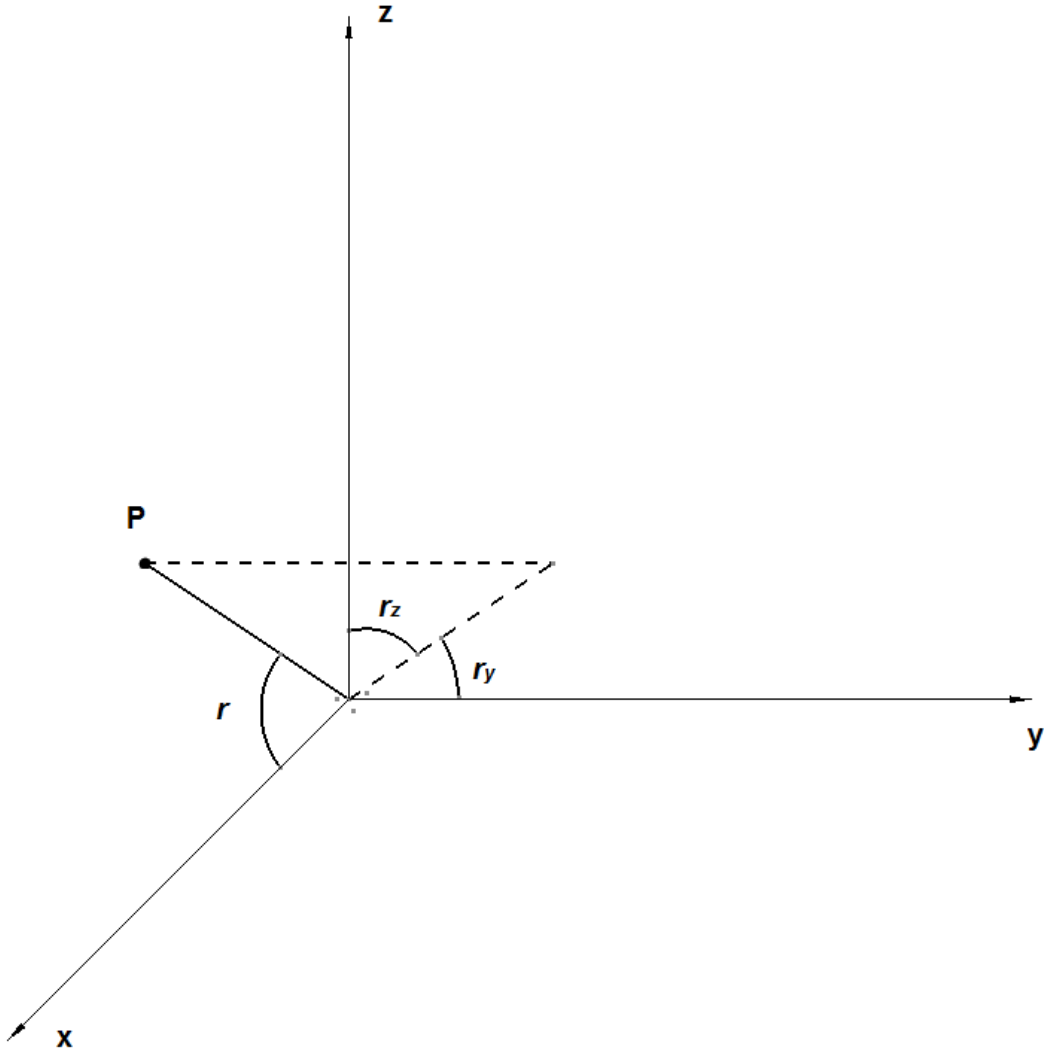


Figura 4.2 – Definição das variáveis angulares

A matriz θ (eq. 4.1) é composta pelos coeficientes definidos por relações trigonométricas exemplificadas pelas equações 4.2 – os demais coeficientes são obtidos seguindo a mesma relação. Os sub índices i indicam o i -ésimo ponto de referência do modelo (1, 2, 3 ou 4).

$$\theta = \begin{bmatrix} r_i & r_{iy} & r_{iz} \\ \rho_{ix} & \rho_i & \rho_{iz} \\ \phi_{ix} & \phi_{iy} & \phi_i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\rho_{1x} = \sin \rho_1 \sin \rho_{1x}$$

$$\begin{aligned} r_{1z} &= \sin r_1 \sin r_{1z} \\ \phi_{1y} &= \sin \phi_1 \sin \phi_{1y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Os coeficientes lineares d_1 , d_2 , d_3 e d_4 correspondem à distância medida entre o centro de gravidade e os pontos de referência 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

4.2 FORÇAS E MOMENTOS INTERNOS

A seguir as equações que descrevem os movimentos de translação e rotação deste sistema serão apresentadas, assim como a equação de movimento generalizada.

4.2.1 Somatório de forças

Os movimentos de translação de cada eixo são descritos pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m\ddot{x}(t) + 4k_x x(t) - (d_1\rho_{1x} + d_2\rho_{2x} + d_3\rho_{3x} + d_4\rho_{4x})k_x\beta + \\ &+ (d_1\phi_{1x} - d_2\phi_{2x} - d_3\phi_{3x} + d_4\phi_{4x})k_x\gamma \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m\ddot{y}(t) + 4k_y y(t) + (d_1r_{1y} + d_2r_{2y} + d_3r_{3y} + d_4r_{4y})k_y\alpha + \\ &+ (d_1\phi_{1y} + d_2\phi_{2y} - d_3\phi_{3y} - d_4\phi_{4y})k_y\gamma \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= m\ddot{z}(t) + 4k_z z(t) + (-d_1r_{1z} + d_2r_{2z} + d_3r_{3z} - d_4r_{4z})k_z\alpha + \\ &+ (-d_1\rho_{1z} - d_2\rho_{2z} + d_3\rho_{3z} + d_4\rho_{4z})k_z\beta \end{aligned} \quad (4.5)$$

A primeira parcela de cada equação representa a influência da inércia do corpo, a segunda parcela é a força gerada pela translação relativa do ponto no eixo analisado e as duas últimas são as forças geradas pela translação relativa do ponto no eixo analisado decorrentes das rotações em torno dos outros eixos.

4.2.2 Somatório de momentos

Para a correta determinação das forças internas atuantes no sistema, os momentos gerados pelas translações e rotações do veículo também devem ser consideradas, como mostram as seguintes equações.

$$\sum M_x = I_x \ddot{\alpha}(t) + k_y (d_1 r_{1y} + d_2 r_{2y} + d_3 r_{3y} + d_4 r_{4y}) y(t) +$$

$$\begin{aligned}
& +k_z(-d_1r_{1z} + d_2r_{2z} + d_3r_{3z} - d_4r_{4z})z(t) + \\
& +k_y(d_1^2r_{1y}^2 + d_2^2r_{2y}^2 + d_3^2r_{3y}^2 + d_4^2r_{4y}^2)\alpha(t) + \\
& +k_z(d_1^2r_{1z}^2 + d_2^2r_{2z}^2 + d_3^2r_{3z}^2 + d_4^2r_{4z}^2)\alpha(t) + \\
& +k_z(d_1^2\rho_{1z}r_{1z} - d_2^2\rho_{2z}r_{2z} - d_3^2\rho_{3z}r_{3z} + d_4^2\rho_{4z}r_{4z})\beta(t) + \\
& +k_y(d_1^2\phi_{1y}r_{1y} + d_2^2\phi_{2y}r_{2y} - d_3^2\phi_{3y}r_{3y} - d_4^2\phi_{4y}r_{4y})\gamma(t)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_y = I_y\ddot{\beta}(t) - k_x(d_1\rho_{1x} + d_2\rho_{2x} + d_3\rho_{3x} + d_4\rho_{4x})x(t) + \\
+ k_z(-d_1\rho_{1z} - d_2\rho_{2z} + d_3\rho_{3z} + d_4\rho_{4z})z(t) + \\
+ k_x(d_1^2\rho_{1x}^2 + d_2^2\rho_{2x}^2 + d_3^2\rho_{3x}^2 + d_4^2\rho_{4x}^2)\beta(t) + \\
+ k_z(d_1^2\rho_{1z}^2 + d_2^2\rho_{2z}^2 + d_3^2\rho_{3z}^2 + d_4^2\rho_{4z}^2)\beta(t) + \\
+ k_z(d_1^2r_{1z}\rho_{1z} - d_2^2r_{2z}\rho_{2z} + d_3^2r_{3z}\rho_{3z} - d_4^2r_{4z}\rho_{4z})\alpha(t) + \\
+ k_x(-d_1^2\phi_{1x}\rho_{1x} + d_2^2\phi_{2x}\rho_{2x} + d_3^2\phi_{3x}\rho_{3x} - d_4^2\phi_{4x}\rho_{4x})\gamma(t)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma M_z = I_z\ddot{\gamma}(t) + k_x(d_1\phi_{1x} - d_2\phi_{2x} - d_3\phi_{3x} + d_4\phi_{4x})x(t) + \\
+ k_y(d_1\phi_{1y} + d_2\phi_{2y} - d_3\phi_{3y} - d_4\phi_{4y})y(t) + \\
+ k_x(d_1^2\phi_{1x}^2 + d_2^2\phi_{2x}^2 + d_3^2\phi_{3x}^2 + d_4^2\phi_{4x}^2)\gamma(t) + \\
+ k_y(d_1^2\phi_{1y}^2 + d_2^2\phi_{2y}^2 + d_3^2\phi_{3y}^2 + d_4^2\phi_{4y}^2)\gamma(t) + \\
+ k_y(d_1^2r_{1y}\phi_{1y} + d_2^2r_{2y}\phi_{2y} - d_3^2r_{3y}\phi_{3y} - d_4^2r_{4y}\phi_{4y})\alpha(t) + \\
+ k_x(-d_1^2\rho_{1x}\phi_{1x} + d_2^2\rho_{2x}\phi_{2x} + d_3^2\rho_{3x}\phi_{3x} - d_4^2\rho_{4x}\phi_{4x})\beta(t)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A primeira parcela de cada equação representa a influência da inércia rotacional do corpo, a segunda parcela e a terceira parcela são os momentos gerados pela translação relativa do ponto nos demais eixos. A quarta e a quinta parcelas representam os momentos gerado pela rotação relativa do ponto em torno do eixo analisado e as duas últimas, o momento decorrente das rotações em torno dos outros eixos.

4.3 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

A equação do movimento da carroceria do veículo segue o mesmo princípio da equação generalizada de um sistema massa-mola-amortecedor como mostrado a seguir.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \tag{4.9}$$

Como se trata de um sistema com 6 GDL, a massa “ m ”, o coeficiente de amortecimento “ c ” e o coeficiente de rigidez “ k ” serão matrizes 6x6 e o deslocamento “ x ”, a velocidade “ \dot{x} ” e a aceleração “ \ddot{x} ” serão vetores 6x1. Neste momento, o amortecimento será desconsiderado.

A matriz de massa é composta pela massa total do veículo “ m ” e os momentos de inércia rotacionais “ I_x ”, “ I_y ” e “ I_z ”.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A matriz de rigidez é composta por coeficientes descritos pelas equações a seguir.

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & k_{15} & k_{16} \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} & 0 & k_{26} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$k_{11} = 4k_x \quad (4.12)$$

$$k_{15} = C_1 k_x \quad (4.13)$$

$$k_{16} = C_2 k_x \quad (4.14)$$

$$k_{22} = 4k_y \quad (4.15)$$

$$k_{24} = C_3 k_y \quad (4.16)$$

$$k_{26} = C_4 k_y \quad (4.17)$$

$$k_{33} = 4k_z \quad (4.18)$$

$$k_{34} = C_5 k_z \quad (4.19)$$

$$k_{35} = C_6 k_z \quad (4.20)$$

$$k_{42} = D_1 k_y \quad (4.21)$$

$$k_{43} = D_2 k_z \quad (4.22)$$

$$k_{44} = D_3 k_y + D_4 k_z \quad (4.23)$$

$$k_{45} = D_5 k_z \quad (4.24)$$

$$k_{46} = D_6 k_y \quad (4.25)$$

$$k_{51} = D_7 k_x \quad (4.26)$$

$$k_{53} = D_8 k_z \quad (4.27)$$

$$k_{54} = D_9 k_z \quad (4.28)$$

$$k_{55} = D_{10} k_x + D_{11} k_z \quad (4.29)$$

$$k_{56} = D_{12} k_x \quad (4.30)$$

$$k_{61} = D_{13} k_x \quad (4.31)$$

$$k_{62} = D_{14} k_y \quad (4.32)$$

$$k_{64} = D_{15} k_y \quad (4.33)$$

$$k_{65} = D_{16} k_x \quad (4.34)$$

$$k_{66} = D_{17} k_x + D_{18} k_y \quad (4.35)$$

onde,

$$C_1 = -d_1 \rho_{1x} - d_2 \rho_{2x} - d_3 \rho_{3x} - d_4 \rho_{4x} \quad (4.36)$$

$$C_2 = d_1 \phi_{1x} - d_2 \phi_{2x} - d_3 \phi_{3x} + d_4 \phi_{4x} \quad (4.37)$$

$$C_3 = d_1 r_{1y} + d_2 r_{2y} + d_3 r_{3y} + d_4 r_{4y} \quad (4.38)$$

$$C_4 = d_1\phi_{1y} + d_2\phi_{2y} - d_3\phi_{3y} - d_4\phi_{4y} \quad (4.39)$$

$$C_5 = -d_1r_{1z} + d_2r_{2z} + d_3r_{3z} - d_4r_{4z} \quad (4.40)$$

$$C_6 = -d_1\rho_{1z} - d_2\rho_{2z} + d_3\rho_{3z} + d_4\rho_{4z} \quad (4.41)$$

e,

$$D_1 = d_1r_{1y} + d_2r_{2y} + d_3r_{3y} + d_4r_{4y} \quad (4.42)$$

$$D_2 = -d_1r_{1z} + d_2r_{2z} + d_3r_{3z} - d_4r_{4z} \quad (4.43)$$

$$D_3 = d_1^2r_{1y}^2 + d_2^2r_{2y}^2 + d_3^2r_{3y}^2 + d_4^2r_{4y}^2 \quad (4.44)$$

$$D_4 = d_1^2r_{1z}^2 + d_2^2r_{2z}^2 + d_3^2r_{3z}^2 + d_4^2r_{4z}^2 \quad (4.45)$$

$$D_5 = d_1^2\rho_{1z}r_{1z} - d_2^2\rho_{2z}r_{2z} - d_3^2\rho_{3z}r_{3z} + d_4^2\rho_{4z}r_{4z} \quad (4.46)$$

$$D_6 = d_1^2\phi_{1y}r_{1y} + d_2^2\phi_{2y}r_{2y} - d_3^2\phi_{3y}r_{3y} - d_4^2\phi_{4y}r_{4y} \quad (4.47)$$

$$D_7 = -d_1\rho_{1x} - d_2\rho_{2x} - d_3\rho_{3x} - d_4\rho_{4x} \quad (4.48)$$

$$D_8 = -d_1\rho_{1z} - d_2\rho_{2z} + d_3\rho_{3z} + d_4\rho_{4z} \quad (4.49)$$

$$D_9 = d_1^2r_{1z}\rho_{1z} - d_2^2r_{2z}\rho_{2z} + d_3^2r_{3z}\rho_{3z} - d_4^2r_{4z}\rho_{4z} \quad (4.50)$$

$$D_{10} = d_1^2\rho_{1x}^2 + d_2^2\rho_{2x}^2 + d_3^2\rho_{3x}^2 + d_4^2\rho_{4x}^2 \quad (4.51)$$

$$D_{11} = d_1^2\rho_{1z}^2 + d_2^2\rho_{2z}^2 + d_3^2\rho_{3z}^2 + d_4^2\rho_{4z}^2 \quad (4.52)$$

$$D_{12} = -d_1^2\phi_{1x}\rho_{1x} + d_2^2\phi_{2x}\rho_{2x} + d_3^2\phi_{3x}\rho_{3x} - d_4^2\phi_{4x}\rho_{4x} \quad (4.53)$$

$$D_{13} = d_1\phi_{1x} - d_2\phi_{2x} - d_3\phi_{3x} + d_4\phi_{4x} \quad (4.54)$$

$$D_{14} = d_1\phi_{1y} + d_2\phi_{2y} - d_3\phi_{3y} - d_4\phi_{4y} \quad (4.55)$$

$$D_{15} = d_1^2r_{1y}\phi_{1y} + d_2^2r_{2y}\phi_{2y} - d_3^2r_{3y}\phi_{3y} - d_4^2r_{4y}\phi_{4y} \quad (4.56)$$

$$D_{16} = -d_1^2\rho_{1x}\phi_{1x} + d_2^2\rho_{2x}\phi_{2x} + d_3^2\rho_{3x}\phi_{3x} - d_4^2\rho_{4x}\phi_{4x} \quad (4.57)$$

$$D_{17} = d_1^2\phi_{1x}^2 + d_2^2\phi_{2x}^2 + d_3^2\phi_{3x}^2 + d_4^2\phi_{4x}^2 \quad (4.58)$$

$$D_{18} = d_1^2 \phi_{1y}^2 + d_2^2 \phi_{2y}^2 + d_3^2 \phi_{3y}^2 + d_4^2 \phi_{4y}^2 \quad (4.59)$$

Por fim, os vetores de deslocamento, aceleração e força.

$$\dot{X} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

$$X = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

$$F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

Substituindo as Eq. (4.10), Eq. (4.11), Eq. (4.60), Eq. (4.61) e Eq. (4.62) na equação geral – Eq. (4.9), obtém-se a equação do movimento do modelo com 6 graus de liberdade proposto.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & k_{15} & k_{16} \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} & 0 & k_{26} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

(4.63)

5 VALIDAÇÃO ANALÍTICA DO MODELO

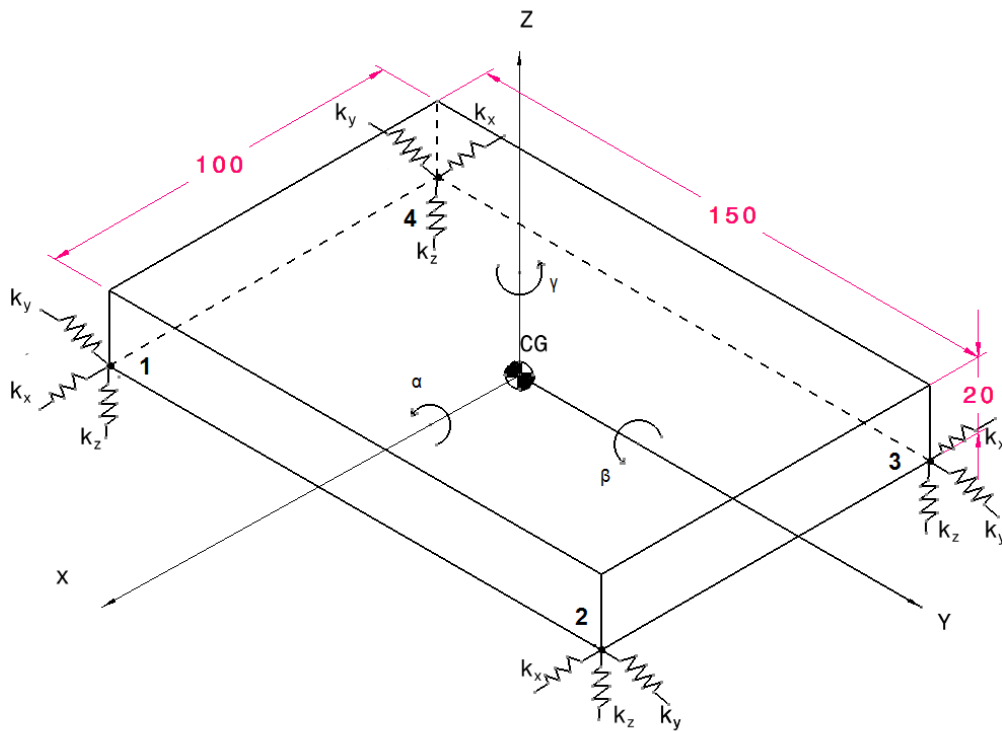


Figura 5.1: modelo analítico do sistema bloco sobre molas.

Neste capítulo será feita a validação analítica do modelo a partir de um bloco fictício apoiado por três molas em cada ponto de apoio localizados nos vértices inferiores (1, 2, 3 e 4) como mostra a Fig. 5.1. Em uma primeira parte, a equação do movimento será calculada analiticamente e depois as frequências naturais do sistema serão calculadas com o auxílio do MATLAB. Na segunda parte, será feito uma simulação computacional utilizando o programa CATIA para se obter as frequências

naturais do mesmo sistema. Por fim, os resultados serão comparados, validando o modelo.

O bloco possui 100 mm de comprimento (L_x), 150 mm de largura (L_y) e 20 mm de altura (L_z) com uma densidade de 7.800 kg/m^2 (ρ). Os coeficientes k_x e k_y são 3500 N.m e o k_z é 1500 N.m .

5.1 CÁLCULO ANALÍTICO

5.1.1 Cálculo da equação do movimento

5.1.1.1 Cálculo da matriz de massa

A massa é obtida pelo *volume* \times *densidade*, como mostra a equação a seguir.

$$m = L_x L_y L_z \rho \quad (5.1)$$

$$m = 2,34 \text{ kg} \quad (5.2)$$

em seguida são calculados os momentos de inércia rotacionais (I_x , I_y e I_z) seguindo as seguintes equações:

$$I_x = \frac{m(L_y^2 + L_z^2)}{12} \quad (5.3)$$

$$I_y = \frac{m(L_z^2 + L_x^2)}{12} \quad (5.4)$$

$$I_z = \frac{m(L_x^2 + L_y^2)}{12} \quad (5.5)$$

assim:

$$I_x = 0,0045 \text{ kg/m}^2 \quad (5.6)$$

$$I_y = 0,0020 \text{ kg/m}^2 \quad (5.7)$$

$$I_z = 0,0063 \text{ kg/m}^2 \quad (5.8)$$

logo, a matriz descrita pela Eq. (4.10) fica:

$$M = \begin{bmatrix} 2,34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0020 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0063 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.1.2 Cálculo da matriz de rigidez

O primeiro passo para se calcular a matriz de rigidez é calcular os coeficientes angulares e lineares. Os coeficientes lineares são as distâncias entre os pontos e o centro de gravidade. As coordenadas dos pontos são mostradas a seguir (considerando o CG como o ponto (0;0;0)):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,050 \\ -0,075 \\ -0,010 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,050 \\ 0,075 \\ -0,010 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} -0,050 \\ 0,075 \\ -0,010 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -0,050 \\ -0,075 \\ -0,010 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Quando adotado o centro de gravidade como a origem do sistema (0;0;0), os coeficientes lineares são os módulos de cada ponto. O módulo de um ponto em um sistema tridimensional é dado por:

$$|P_{(x,y,z)}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.14)$$

Como os quatro pontos (1, 2, 3 e 4) estão nos vértices inferiores de um paralelepípedo, eles estão equidistantes do centro de gravidade. Por isso, possuem o mesmo módulo e, além disso, os mesmos coeficientes angulares.

$$d_1 = |P_1| = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 0,0907 \text{ m} \quad (5.15)$$

As variáveis angulares são então calculadas por meio de simples relações trigonométricas com o auxílio da Fig. (4.2).

$$r_1 = \cos^{-1} \left(\frac{L_x/2}{d_1} \right)$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 56,5425^\circ \quad (5.16)$$

$$r_{1y} = \tan^{-1} \left(\frac{L_z/2}{L_y/2} \right)$$

$$r_{1y} = r_{2y} = r_{3y} = r_{4y} = 7,5946^\circ \quad (5.17)$$

$$r_{1z} = \tan^{-1} \left(\frac{L_y/2}{L_z/2} \right)$$

$$r_{1z} = r_{2z} = r_{3z} = r_{4z} = 82,4054^\circ \quad (5.18)$$

$$\rho_1 = \cos^{-1} \left(\frac{L_y/2}{d_1} \right)$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 56,5425^\circ \quad (5.19)$$

$$\rho_{1x} = \tan^{-1} \left(\frac{L_z/2}{L_x/2} \right)$$

$$\rho_{1x} = \rho_{2x} = \rho_{3x} = \rho_{4x} = 11,3099^\circ \quad (5.20)$$

$$\rho_{1z} = \tan^{-1} \left(\frac{L_x/2}{L_z/2} \right)$$

$$\rho_{1z} = \rho_{2z} = \rho_{3z} = \rho_{4z} = 78,6901^\circ \quad (5.21)$$

$$\phi_1 = \cos^{-1} \left(\frac{L_z/2}{d_1} \right)$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = 83,6695^\circ \quad (5.22)$$

$$\phi_{1x} = \tan^{-1} \left(\frac{L_y/2}{L_x/2} \right)$$

$$\phi_{1x} = \phi_{2x} = \phi_{3x} = \phi_{4x} = 56,3099^\circ \quad (5.23)$$

$$\phi_{1y} = \tan^{-1} \left(\frac{L_x/2}{L_y/2} \right)$$

$$\phi_{1y} = \phi_{2y} = \phi_{3y} = \phi_{4y} = 33,6901^\circ \quad (5.24)$$

A matriz com os coeficientes angulares (Eq. 4.1) pode então ser calculada seguindo o princípio da Eq. (4.2). Como no sistema estudado os coeficientes angulares dos pontos serão iguais, o sub índice que indica o ponto em foco cujo coeficiente está a ser calculado será omitido. Ou seja, ao invés de se utilizar “ r_{ix} ”, será escrito “ r_x ”.

$$r = \sin r \sin r = 0,6960 \quad (5.25)$$

$$r_y = \sin r \sin r_y = 0,1103 \quad (5.26)$$

$$r_z = \sin r \sin r_z = 0,8270 \quad (5.27)$$

$$\rho = \sin \rho \sin \rho = 0,3161 \quad (5.28)$$

$$\rho_x = \sin \rho \sin \rho_x = 0,1103 \quad (5.29)$$

$$\rho_z = \sin \rho \sin \rho_z = 0,5513 \quad (5.30)$$

$$\phi = \sin \phi \sin \phi = 0,9878 \quad (5.31)$$

$$\phi_x = \sin \phi \sin \phi_x = 0,8270 \quad (5.32)$$

$$\phi_y = \sin \phi \sin \phi_y = 0,5513 \quad (5.33)$$

assim, a Eq (4.1) fica:

$$\theta = \begin{bmatrix} r_i & r_{iy} & r_{iz} \\ \rho_{ix} & \rho_i & \rho_{iz} \\ \phi_{ix} & \phi_{iy} & \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6960 & 0,1103 & 0,8270 \\ 0,1103 & 0,3161 & 0,5513 \\ 0,8270 & 0,5513 & 0,9878 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

O próximo passo é então calcular os coeficientes (C e D) conforme as Equações (4.36) a (4.58).

$$C_1 = -0,0400 \quad (5.35)$$

$$C_2 = 0 \quad (5.36)$$

$$C_3 = 0,0400 \quad (5.37)$$

$$C_4 = 0 \quad (5.38)$$

$$C_5 = 0 \quad (5.39)$$

$$C_6 = 0 \quad (5.40)$$

$$D_1 = 0,0400 \quad (5.41)$$

$$D_2 = 0 \quad (5.42)$$

$$D_3 = 0,0004 \quad (5.43)$$

$$D_4 = 0,0225 \quad (5.44)$$

$$D_5 = 0 \quad (5.45)$$

$$D_6 = 0 \quad (5.46)$$

$$D_7 = -0,0400 \quad (5.47)$$

$$D_8 = 0 \quad (5.48)$$

$$D_9 = 0 \quad (5.49)$$

$$D_{10} = 0,0004 \quad (5.50)$$

$$D_{11} = 0,0100 \quad (5.51)$$

$$D_{12} = 0 \quad (5.52)$$

$$D_{13} = 0 \quad (5.53)$$

$$D_{14} = 0 \quad (5.54)$$

$$D_{15} = 0 \quad (5.55)$$

$$D_{16} = 0 \quad (5.56)$$

$$D_{17} = 0,0225 \quad (5.57)$$

$$D_{18} = 0,0100 \quad (5.58)$$

Pode-se então calcular os coeficientes (Eq. 4.12 a 4.35) da matriz de rigidez (Eq. 4.11):

$$k_{11} = 14.000 \text{ N.m} \quad (5.59)$$

$$k_{15} = -140 \text{ N.m} \quad (5.60)$$

$$k_{16} = 0 \quad (5.61)$$

$$k_{22} = 14.000 \text{ N.m} \quad (5.62)$$

$$k_{24} = 140 \text{ N.m} \quad (5.63)$$

$$k_{26} = 0 \quad (5.64)$$

$$k_{33} = 6000 \text{ N.m} \quad (5.65)$$

$$k_{34} = 0 \quad (5.66)$$

$$k_{35} = 0 \quad (5.67)$$

$$k_{42} = 140 \text{ N.m} \quad (5.68)$$

$$k_{43} = 0 \quad (5.69)$$

$$k_{44} = 35 \text{ N.m} \quad (5.70)$$

$$k_{45} = 0 \quad (5.71)$$

$$k_{46} = 0 \quad (5.72)$$

$$k_{51} = -140 \text{ N.m} \quad (5.73)$$

$$k_{53} = 0 \quad (5.74)$$

$$k_{54} = 0 \quad (5.75)$$

$$k_{55} = 16 \text{ N.m} \quad (5.76)$$

$$k_{56} = 0 \quad (5.77)$$

$$k_{61} = 0 \quad (5.78)$$

$$k_{62} = 0 \quad (5.79)$$

$$k_{64} = 0 \quad (5.80)$$

$$k_{65} = 0 \quad (5.81)$$

$$k_{66} = 114 \text{ N.m} \quad (5.82)$$

assim, a matriz de rigidez é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} 14.000 & 0 & 0 & 0 & -140 & 0 \\ 0 & 14.00 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ -140 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 114 \end{bmatrix} \text{ N.m} \quad (5.83)$$

5.1.1.3 Equação do movimento

Substituindo as Equações (5.9) e (5.83) na Equação (4.63) tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2,34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,34 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0020 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0063 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 14.000 & 0 & 0 & 0 & -140 & 0 \\ 0 & 14.00 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ -140 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 114 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (5.84)$$

5.1.2 Cálculo das frequências naturais

O cálculo das frequências naturais é explicado no Anexo I. Para a validação do modelo proposto foi utilizada a função $eig(K,M)$ do MATLAB para o cálculo das frequências de ressonância. Vale salientar que essa equação retorna um vetor com o quadrado das frequências angulares (ω^2). Para se obter a frequência em Hertz (Hz) é necessário tirar a raiz da resposta (\sqrt{x} é a função utilizada no MATLAB) e dividir por 2π . A aplicação da função e o resultado podem ser vistos na figura a seguir (Fig. 5.2).

```

Command Window
>> M = [2.34 0 0 0 0 0; 0 2.34 0 0 0 0; 0 0 2.34 0 0 0; 0 0 0 0.0045 0 0; 0 0 0 0 0.0020 0; 0 0 0 0 0 0.0063]
M =
    2.3400         0         0         0         0         0
         0    2.3400         0         0         0         0
         0         0    2.3400         0         0         0
         0         0         0    0.0045         0         0
         0         0         0         0    0.0020         0
         0         0         0         0         0    0.0063

>> K = [14000 0 0 0 -140 0; 0 14000 0 140 0 0; 0 0 6000 0 0 0; 0 140 35 0 0; -140 0 0 0 16 0; 0 0 0 0 0 114]
K =
   14000         0         0         0        -140         0
         0    14000         0         140         0         0
         0         0         6000         0         0         0
         0         140         0         35         0         0
        -140         0         0         0         16         0
         0         0         0         0         0        114

>> fr = sqrt(eig(K,M))/(2*pi)
fr =
    8.0591
   10.9227
   11.5289
   14.6849
   15.3260
   21.4093

fx >> |

```

Figura 5.2 – Cálculo das frequências naturais do sistema com 6 GDL utilizando a função $eig(A,B)$ do MATLAB.

$$f = \sqrt{\text{eig}(K, M)} / (2 * \pi) \quad (5.85)$$

$$f = \begin{pmatrix} 8,0591 \\ 10,9227 \\ 11,5289 \\ 14,6849 \\ 15,3260 \\ 21,4093 \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

5.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta etapa foi feita uma simulação computacional utilizando o CATIA de um bloco de aço (*steel*) sobre molas com as mesmas dimensões do bloco da Fig. (5.1) e com as molas localizadas nos mesmos pontos.

5.2.1 Montagem do sistema

A Figura (5.3) mostra o bloco construído com as mesmas dimensões do bloco utilizado para o cálculo analítico.

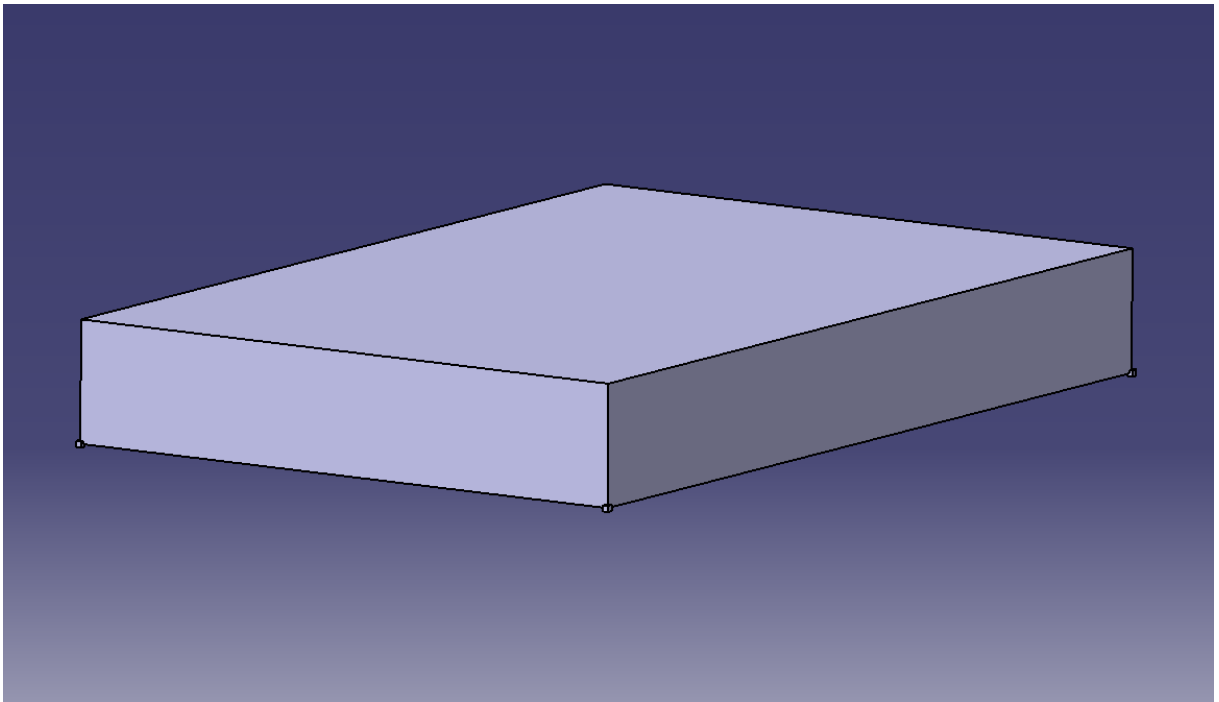


Figura 5.3 – Bloco construído no CATIA para simulação computacional. Dimensões: 100x150x20 mm.

Porém, para o posicionamento das molas durante a simulação, foi necessário adicionar um cubo de 1 mm^3 em cada uma das arestas inferiores (Fig. 5.4) pois as molas são posicionadas nos centros das faces e não em arestas. Essa modificação vai gerar um aumento na massa do bloco (0,0312 g) e pode gerar uma divergência dos resultados quando comparados com o modelo analítico, porém em uma escala muito pequena.

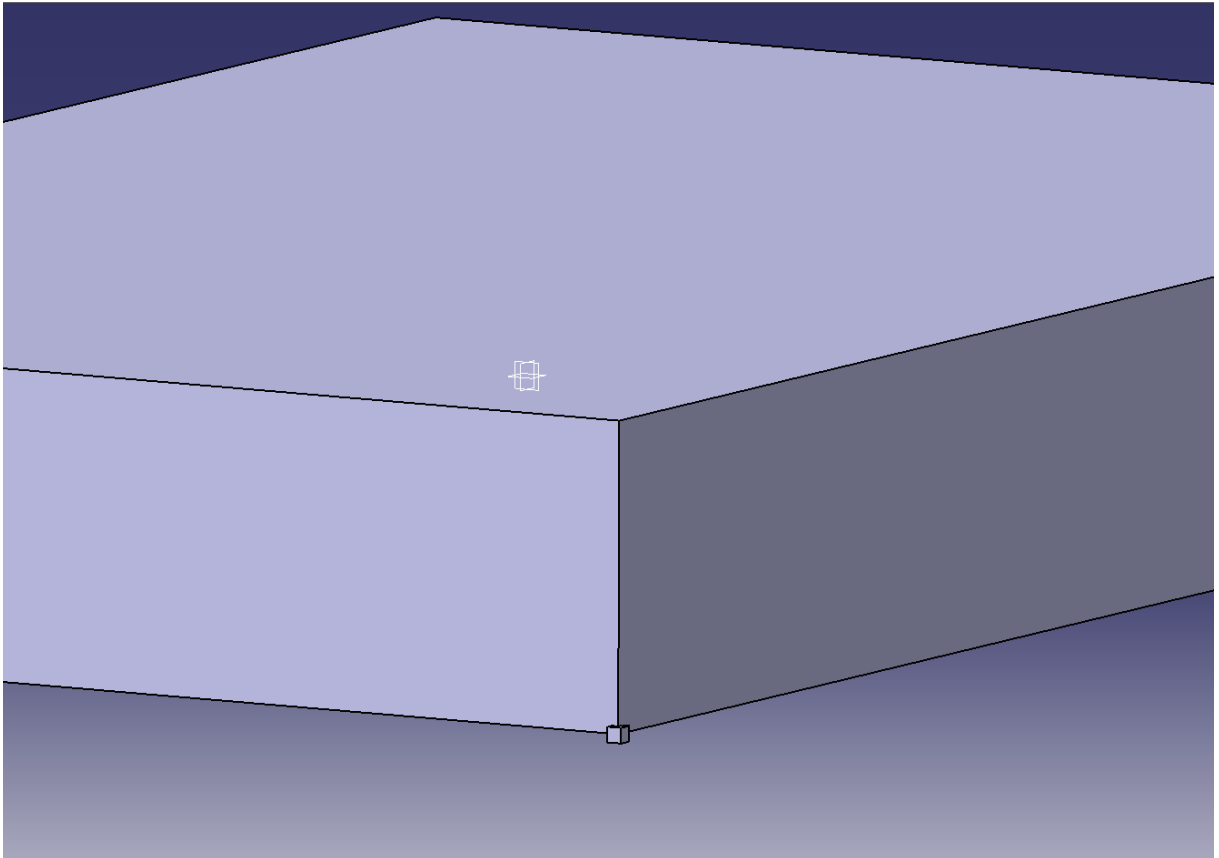


Figura 5.4 – Detalhe do cubo de 1 mm³ acrescentado para o posicionamento das molas

Por fim, foi adicionado o material (aço – *steel*) ao bloco (Fig. 5.5).

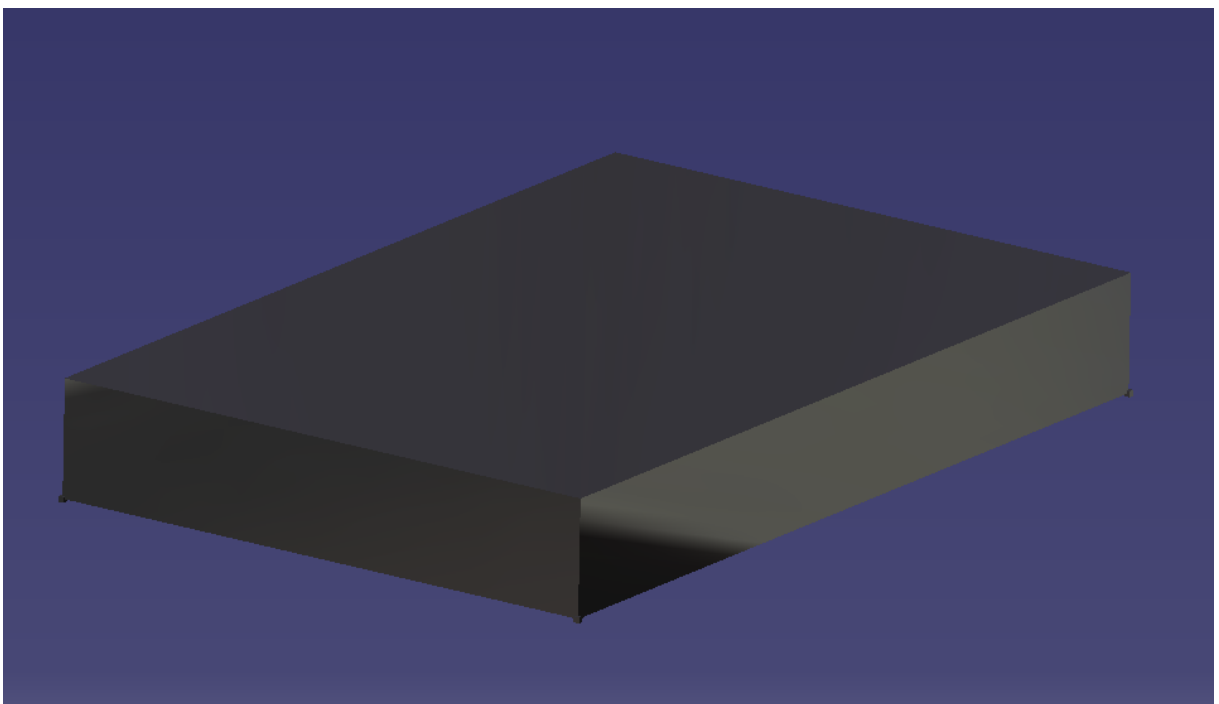


Figura 5.5 – Definido aço (*steel*) como o material do bloco.

5.2.2 Simulação das frequências naturais

Primeiramente, para a realização da análise estática em elementos finitos, foi criada uma malha e as molas foram posicionadas e engastadas nos vértices inferiores do bloco. Embora na Figura (5.6) as molas aparentem estarem todas no mesmo sentido, os coeficientes de rigidez são estabelecidos para cada eixo individualmente, mantendo os mesmos valores dos cálculos analíticos (em cada ponto, uma mola possuirá $k_x = 3500 \text{ Nm}$, a outra $k_y = 3500 \text{ Nm}$ e a outra $k_z = 1500 \text{ Nm}$; todos os outros valores serão 0).

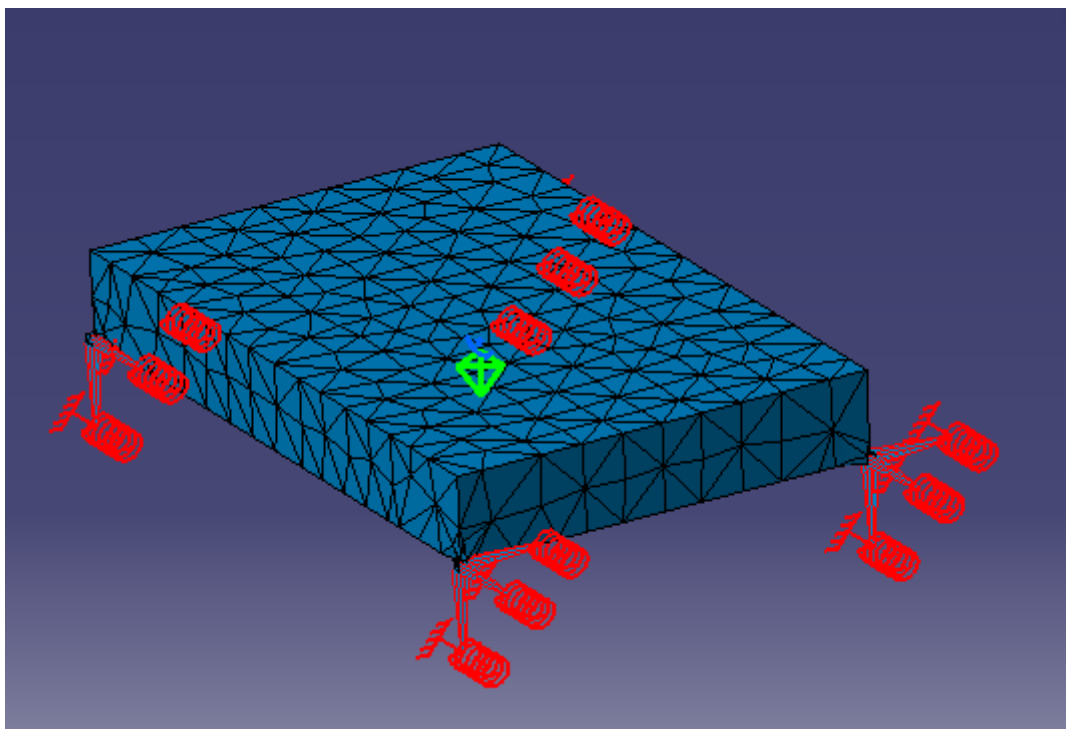


Figura 5.6 – Bloco com malha e molas posicionadas e engastadas, pronto para a análise.

Para a simulação com o método de elementos finitos, foram utilizados quatro tipos de malhas (Fig. 5.7) para analisar uma possível convergência.

Malha 1		Malha 2		Malha 3		Malha 4	
Entity	Size	Entity	Size	Entity	Size	Entity	Size
Nodes	379	Nodes	1276	Nodes	3715	Nodes	19027
Elements	163	Elements	631	Elements	1998	Elements	11546

Figura 5.7 – Numeração das malhas e seus respectivos números de nós e elementos.

Mesmo o corpo em análise possuindo muitos graus de liberdade, somente os 6 primeiros foram estudados, sendo os mais importantes para a validação do modelo proposto de 6 GDL. As Figuras (5.8) a (5.13) mostram cada um desses modos e suas frequências para a malha 4 (ver Fig. 5.7).

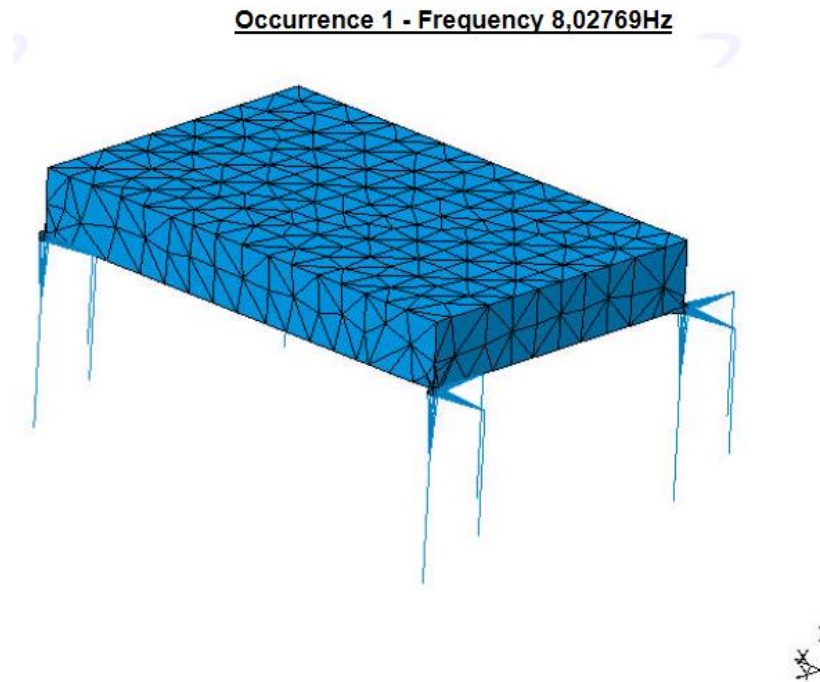


Figura 5.8 – 1º Modo: translação em z; 8,028 Hz

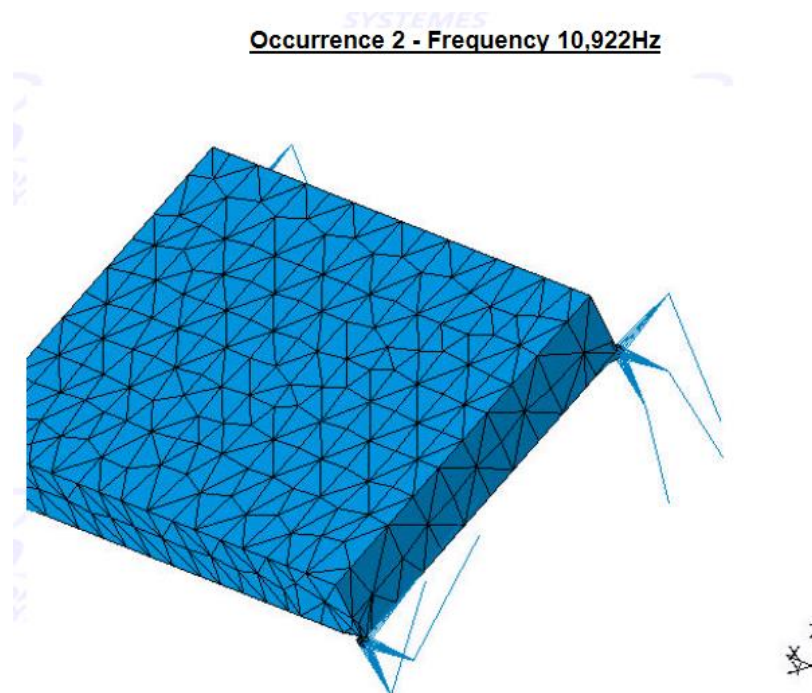


Figura 5.9 – 2º Modo: translação em y; 10,922 Hz

Occurrence 3 - Frequency 11,5017Hz

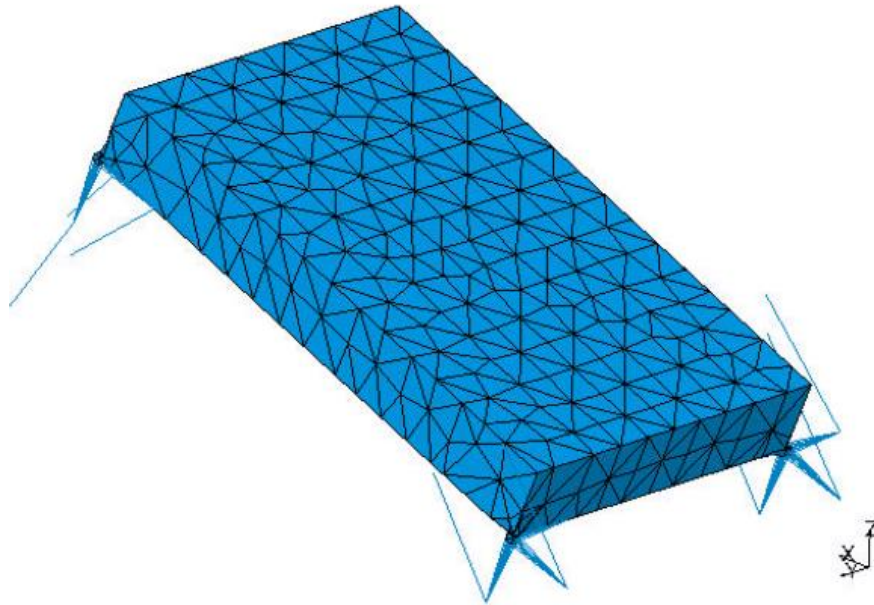


Figura 5.10 – 3º Modo: translação em x; 11,502 Hz

Occurrence 4 - Frequency 14,6923Hz

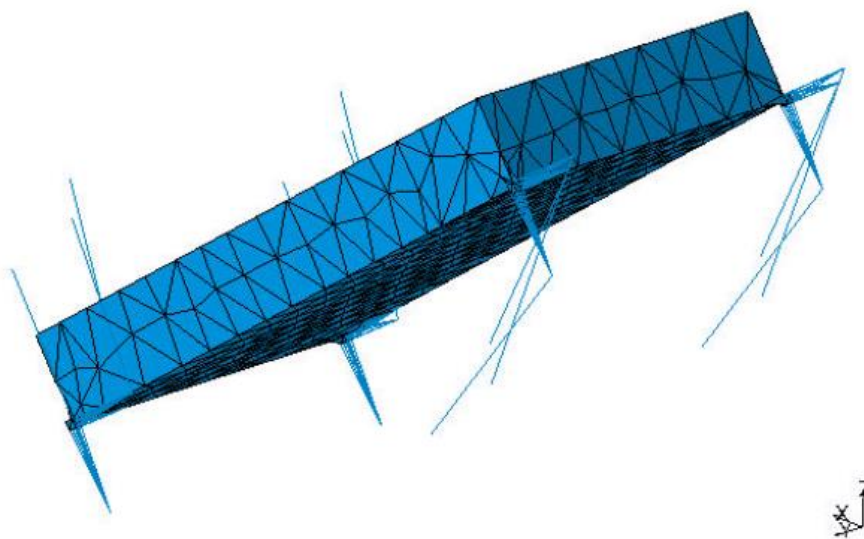


Figura 5.11 – 4º Modo: rotação em torno do eixo y; 14,692 Hz

Occurrence 5 - Frequency 15,3059Hz

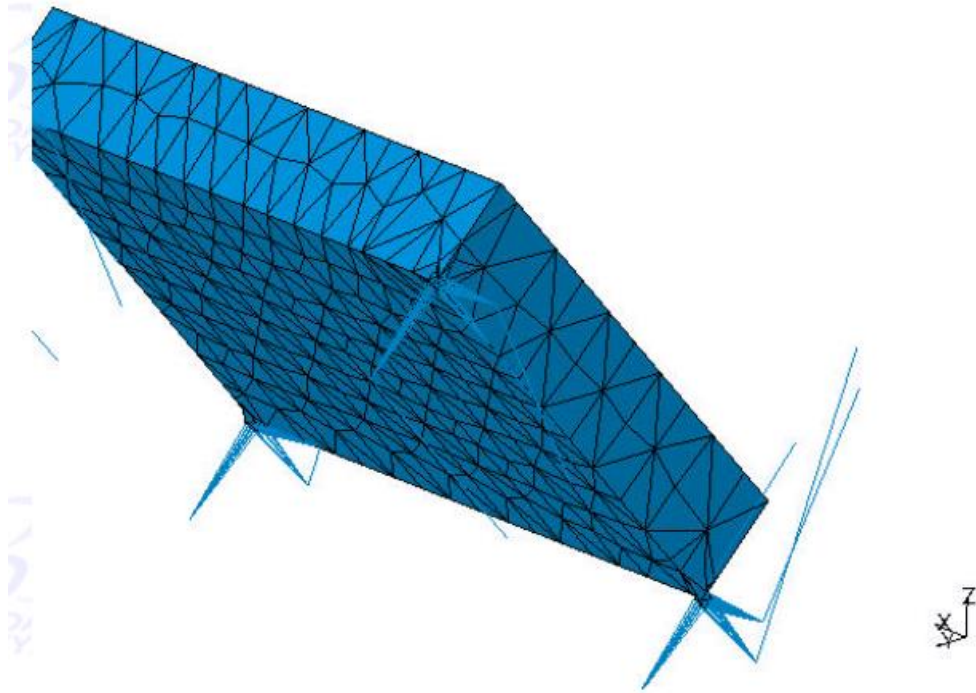


Figura 5.12 – 5º Modo: rotação em torno do eixo x; 15,306 Hz

Occurrence 6 - Frequency 21,2365Hz

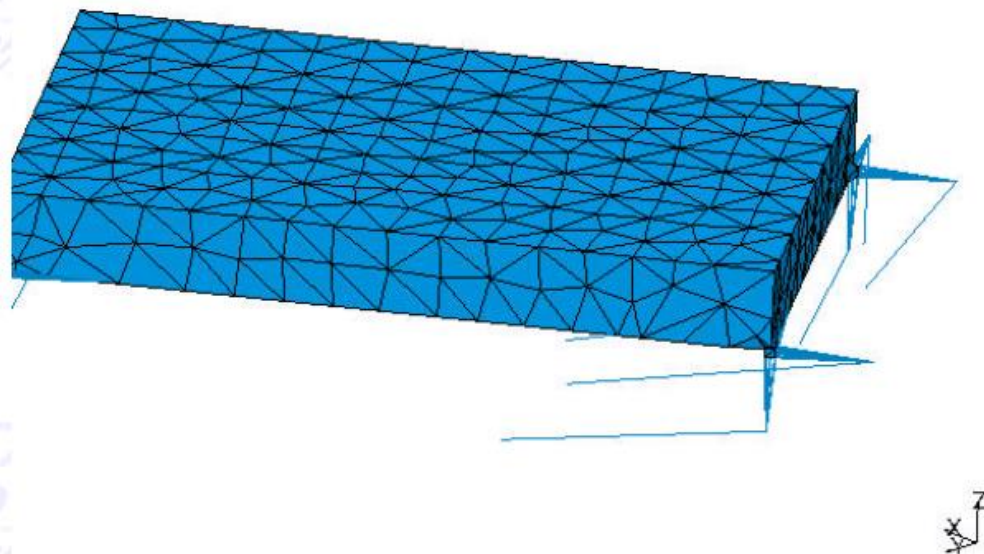


Figura 5.13 – 6º Modo: rotação em torno do eixo z; 21,236 Hz

5.3 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS

Como se pode notar na Tabela 5.1, houve a convergência das malhas e o erro (Eq. 5.87) na casa de 10^{-3} entre o modelo proposto e a simulação é satisfatório. Pode-se dizer, então, que o modelo analítico proposto com 6 graus de liberdade está devidamente validado.

Tabela 5.1 – Comparação entre o modelo analítico proposto e as simulações

MODELO	MALHA 1	MALHA 2	MALHA 3	MALHA 4
8,0591	8,021	8,028	8,028	8,028
10,9227	10,914	10,923	10,922	10,922
11,5289	11,491	11,503	11,502	11,502
14,6849	14,663	14,695	14,692	14,692
15,3260	15,281	15,309	15,306	15,306
21,4093	21,195	21,241	21,237	21,236
ERRO	0,4832	0,134	0,012	0,001

$$erro = \sum(\sqrt{f_{modelo_i} - f_{simulada_i}}) \quad (5.87)$$

Bibliografia

ABNT. 2000. *NBR 6023: Informação e Documentação - Referências*. Rio de Janeiro : TÉCNICAS, ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS, 2000.

Alves, M. B. B. 2007. COMO FAZER REFERÊNCIAS: bibliográficas, eletrônicas e demais formas de documentos. [Online] 2007. <http://bu.ufsc.br/framerefer.html>.

Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial. 2003. *Vocabulário internacional de termos fundamentais e gerais de metrologia*. 3. Rio de Janeiro : INMETRO, 2003. p. 75. ISBN 85-87090-90-9.

Figura 2.1 - <http://www.portalpower.com.br/wp-content/uploads/Tecnologia-Sistemas-Automotivos.jpg>

Figura 2.2 - <https://blogdoenem.com.br/wp-content/uploads/2017/05/3.png>

(Moysés, 2002).

RAO

Kreyzig (2009),

Gillespie (1992)

ANEXOS

	Pág.
Anexo I	
Autovalores e autovetores	
Exemplo	
Aplicação em sistema massa-mola	
Anexo II	
Teorema de Cramer	

ANEXO I: Autovalores e autovetores

Segundo Kreyzig (2009), de onde toda esta discussão foi baseada, do ponto de vista de aplicações em engenharia, os problemas de autovalores são alguns dos mais importantes relacionados a matrizes. Este anexo serve como base para o cálculo das frequências naturais do modelo proposto com 6 GDL realizado na seção 5.1.2

Seja $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ uma dada matriz $n \times n$ e considerando a seguinte equação vetorial:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \quad (\text{I.1})$$

onde, \mathbf{x} é um vetor desconhecido e λ um escalar desconhecido.

O objetivo é determinar quais valores de \mathbf{x} e λ satisfazem a Eq. (I.1). Ou seja, vetores \mathbf{x} para os quais a multiplicação por \mathbf{A} tenha o mesmo efeito que a multiplicação por um escalar λ . Em outras palavras, \mathbf{Ax} deve ser proporcional a \mathbf{x} . Um valor de λ para o qual a Eq. (I.1) tem uma solução $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ é chamado de **autovalor** da matriz \mathbf{A} e os vetores correspondentes \mathbf{x} de cada λ são chamados de **autovetores**. O conjunto de todos os autovalores de \mathbf{A} é chamado de **espectro** de \mathbf{A} .

EXEMPLO

Considere a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

Aplicando na Eq. (I.1):

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

Em componentes:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 - 2x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

A Equação (I.4) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} (-5 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (-2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Reescrevendo em notação matricial:

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (I.6)$$

onde I é a matriz identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

De acordo com o teorema de Cramer (ver Anexo II), pelo sistema ser homogêneo, terá uma solução não-trivial $x \neq 0$ se e somente se o determinante de seus coeficientes for zero. Assim:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (I.8)$$

calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (-5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 4 = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \quad (I.9)$$

As soluções dessa equação quadrática são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -6$. Estes são os autovalores de A . Os auto vetores para cada λ são obtidos resolvendo o sistema da Eq. (I.5) para o λ_1 e λ_2 .

Para $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (I.10)$$

Uma solução é $x_2 = 2x_1$. Se escolhermos $x_1 = 1$, obtemos o autovetor:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

Para $\lambda = -6$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \quad (I.12)$$

Uma solução é $x_2 = -x_1/2$. Se escolhermos $x_2 = 2$, obtemos o autovetor:

$$x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

APLICAÇÃO EM SISTEMA MASSA-MOLA

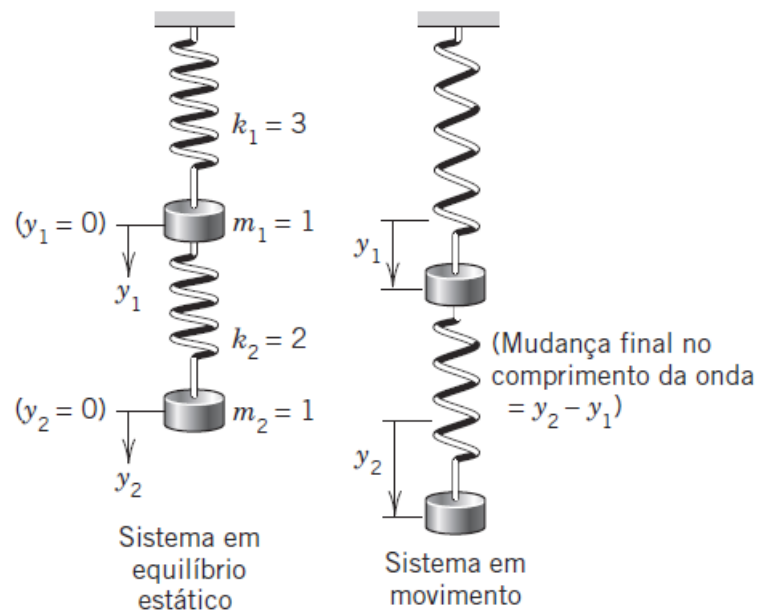


Figura I.1 – Sistema massa-mola com 2 GDL

Os sistemas massa-mola envolvendo várias massas e molas também podem ser tratados como problemas de autovalores como mostra Kreyszig (2009). Considere a equação do movimento do sistema apresentado pela Figura (I.1) (ver seção 2.1.1.2)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

Se multiplicarmos a equação pela inversa da matriz de massa \mathbf{m}^{-1} teremos:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{y} = 0 \quad (\text{I.13})$$

Fazendo:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t} \quad (\text{I.14})$$

Tem-se (a matriz identidade \mathbf{I} é substituída por um escalar unitário e omitida):

$$\omega^2 \mathbf{x}e^{\omega t} + \mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{x}e^{\omega t} = 0 \quad (\text{I.15})$$

Dividindo por $e^{\omega t}$ e escrevendo $\omega^2 = \lambda$ e $-\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{A}$, vemos que o sistema mecânico leva a um problema de autovalor (Eq. (I.1)).

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\text{I.1})$$

