



**Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Curso de Engenharia de Energia**

**AVALIAÇÃO DA INÉRCIA DE GIRAÇÃO EM
ROTORES DE TURBINAS EÓLICAS**

Autor: Romualdo Braga Alves da Silva
Orientador: Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes

Brasília, DF, 2014



Romualdo Braga Alves da Silva

AVALIAÇÃO DA INÉRCIA DE GIRAÇÃO EM ROTORES DE TURBINAS EÓLICAS

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Energia da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia.

Orientador: Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes

**Brasília, DF
2014**

AVALIAÇÃO DA INÉRCIA DE GIRAÇÃO EM ROTORES DE TURBINAS EÓLICAS

Romualdo Braga Alves da Silva

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em 01/12/2014 apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, UnB/ENM/FT
Orientador

Prof. Alberto Diniz, UnB/ENM/FT
Convidado 1

Prof^a. Suzana Ávila, UnB/FGA
Convidado 2

Brasília, DF
2014

AGRADECIMENTOS

A minha Mãe, por sempre estar me acompanhando em todas as minhas etapas e por ser fundamental em minha vida.

A meu Pai, por me fazer ver o lado bom da vida.

Ao Prof. Girão, pelos ensinamentos, pela paciência e por ser um grande professor e engenheiro.

Ao funcionário Felipe, por prestar sempre apoio as minhas atividades neste trabalho.

Aos meus amigos e familiares, por me apoiarem sempre.

A minha namorada, Camila, por estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao Prof. Flaminio, agradeço pela ajuda e empréstimo das pás do rotor, usadas nos ensaios.

Agradeço também ao Projeto Tucunaré Eletronorte.

O presente trabalho tem como finalidade a construção e a validação de uma Bancada experimental para a obtenção do momento de inércia de rotação em corpos rígidos. Para tal propósito, alguns métodos experimentais foram estudados e analisados. Após este levantamento, avaliou-se que o Método do Pêndulo Trifilar Torcional era o mais indicado e eficaz para se obter o tensor inercial para corpos mais complexos. Uma Bancada experimental então foi construída, seguindo os mesmos procedimentos do método escolhido, e testada através de ensaios experimentais, utilizando um modelo de corpo com geometria simples e regular, e outro com geometria complexa, já previamente definidos. Primeiramente, é apresentada uma abordagem de todo o referencial teórico do Método do Pêndulo Trifilar e seus devidos procedimentos, e em seguida são feitas as experimentações práticas na Bancada com os corpos. Os resultados finais obtidos de momento de inércia dos corpos, juntamente com erros experimentais e propagação das incertezas são comparados e discutidos ao final, analisando a exatidão e a confiabilidade da Bancada construída. Para perspectivas futuras deste trabalho, a Bancada experimental serviu de ensaio para a análise inercial de dois rotores de uma turbina eólica de eixo horizontal (TEEH) de pequeno porte.

Palavras Chave: Bancada experimental, Momento de inércia, Pêndulo Trifilar, Propagação de Erros.

ABSTRACT

This work aims to construct and validate an experimental bench to obtain the moment of inertia in rigid bodies. For this purpose, some experimental methods have been studied and analyzed. After this survey, it was evaluated that the Trifilar Torsion Pendulum method was the most suitable and effective to give the inertial tensor for complex bodies. An experimental bench was then constructed by following the same procedures of the method chosen, and tested through experimental trials using a body model with simple and regular geometry, and another with complex geometry, as previously defined. First, an approach to the whole bibliography of the method of the Trifilar Pendulum and their proper procedures is presented, and then the practical experiments are done on bench with their bodies. The final results of the moment of inertia of bodies, along with experimental errors and error propagation are compared and discussed at the end, analyzing the accuracy and reliability of the constructed bench. Future prospects for this work, the experimental bench was used for inertial analysis of two rotors of a Small Wind Turbine Horizontal Axis (SWTHA).

Key words: Experimental bench, Moment of Inertia, Trifilar Pendulum, Error Propagation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Distribuição das usinas eólicas no mundo	12
1.2	Distribuição das usinas eólicas no mundo por país	12
1.3	Pás em fibra de vidro e pás em fibra de carbono.....	15
2.1	Pêndulo Trifilar com uma RSP.....	19
2.2	Pêndulo multifilar torcional suspenso por cinco fios	19
2.3	Modelo mais complexo e moderno de suspensão trifilar	19
2.4	Um atuador sobre uma placa de suspensão trifilar	20
2.5	Pêndulo Físico	21
2.6	Método "String and Weight"	23
2.7	Bancada experimental do Método "String and Weight"	23
2.8	Pêndulo Trifilar Torcional	26
2.9	Vista superior e vista lateral através da seção do pêndulo.....	27
3.1	Bancada Experimental.....	31
3.2	Corpo de prova sendo testado na Bancada Experimental	31
3.3	Modelo do pêndulo bifilar torcional.....	37
3.4	Bancada experimental suspensa pelos dois fios utilizada.....	37
3.5	Dependência entre o período de oscilação e o comprimento dos fios	38
4.1	Ajuste do modelo teórico senoidal às medidas obtidas com o Tracker.....	39
4.2	Gráficos do deslocamento vertical da plataforma do pêndulo trifilar	41
4.3	Vista do programa Tracker referente ao experimento do prisma na bancada.	43
4.4	Período de oscilação experimental para a bancada sem o corpo.....	44
4.5	Período de oscilação experimental medido para a bancada com o corpo	45
4.6	Comparação das Inércias de rotação do prisma	47
4.7	Geometria dos centros de massa da plataforma e do corpo desalinhados.....	48
4.8	Inércia de rotação do prisma em função do Δx deslocado.....	50
4.9	Modelo do rotor de uma turbina hidrocínética reduzida	51
4.10	Ensaio do rotor hidrocínético no pêndulo torcional trifilar	52
4.11	Vista do software Tracker no procedimento experimental na bancada	53
4.12	Gráfico de medições do experimento na bancada com o rotor	54
4.13	Inércia de rotação analítica e experimental com margem de erro	56
4.14	Ensaio do rotor com pás de fibra de carbono mostrado no software Tracker.....	57
4.15	Evolução temporal do ângulo $\theta(t)$ no pêndulo trifilar	62
4.16	Ajuste por função exponencial da envoltória amortecida	63
4.17	Evolução temporal do ângulo $\theta(t)$ no pêndulo trifilar	64
4.18	Ajuste por função exponencial da envoltória amortecida	64

LISTA DE TABELAS

2.1	Resumo dos resultados de inércia de rotação para os rotores da turbina	24
3.1	Descrição dos equipamentos utilizados nos ensaios	33
3.2	Parâmetros estatísticos	36
4.1	Especificações do prisma quadrado regular	41
4.2	Parâmetros do experimento	44
4.3	Parâmetros do experimento com o prisma	45
4.4	Dados Experimentais	46
4.5	Valores numéricos analíticos e experimentais	47
4.6	Parâmetros do experimento com o rotor hidrocínético	54
4.7	Dados Experimentais.	55
4.8	Valores numéricos analíticos e experimentais identificados do rotor	55
4.9	Comparação da inércia de rotação de rotores de uma turbina eólica.	57
4.10	Comparação da inércia de rotação amortecida e não-amortecida de rotores	66

SUMÁRIO

CAPA	
Folha de rosto	2
Agradecimentos	5
Resumo	6
Abstract	7
Lista de Ilustrações	8
Lista de Tabelas	9
1 INTRODUÇÃO GERAL	11
1.1 Energia Eólica.....	11
1.2 Descrição de Aerogeradores e seus componentes.....	13
1.3 Contexto Industrial de Turbinas Eólicas de Pequeno Porte	14
1.4 Objetivo	16
2 IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DA INÉRCIA ROTACIONAL EM CORPOS	17
2.1 Revisão Bibliográfica	17
2.2 Estado da arte	18
2.3 Estudos Preliminares.....	20
2.3.1 Método do pêndulo físico	20
2.3.2 Método “ <i>String and Weight</i> ”	22
2.3.3 Resultados.....	24
2.4 Método do Pêndulo Trifilar Torcional.....	25
3 METODOLOGIA EXPERIMENTAL	30
3.1 Concepção da Bancada Experimental.....	30
3.2 Estudo da propagação de incertezas	31
3.3 Uso do software <i>Tracker</i>	35
3.4 Erro relativo do período.....	35
3.5 Caso Particular	37
4 RESULTADOS DA VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DA BANCADA	39
4.1 Caracterização do sinal – Pêndulo Trifilar	39
4.2 Prisma	41
4.2.1 Resultados Analíticos	42
4.2.2 Resultados Experimentais	43
4.2.3 Desalinhamento do centro de massa	48
4.3 Rotor Hidrocinético	51
4.3.1 Resultados Analíticos	51
4.3.2 Resultados Experimentais	52
4.4 Rotor Eólico	57
4.4.1 Amortecimento no Pêndulo Trifilar	58
4.4.1.1 Determinação do amortecimento	59
4.4.1.2 Transformada de Hilbert.....	60
4.4.1.3 Resultados Práticos	62
5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	67
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70

1 INTRODUÇÃO GERAL

Ao ritmo que cresce o consumo dos combustíveis fósseis, e tendo em conta que se prevê um aumento ainda maior em médio prazo, colocam-se dois importantes problemas: o primeiro são questões de ordem ambiental e o segundo é o fato dos recursos energéticos fósseis serem esgotáveis. As fontes de energias renováveis surgem como uma alternativa ou complemento às convencionais. (Falcão, 2006)

Atualmente, quando se trata de geração de energia, em qualquer parte do mundo a primeira visão que se tem é a de maior distribuição possível juntamente com a maior economia envolvida. Esses foram os principais fatores que justificam o desenvolvimento de estudos relacionados à energia renovável. E, através desses conhecimentos aponta-se a energia eólica como um tipo de energia diferenciado das demais, indicando resultados significativos de crescimento tanto em países desenvolvidos como em países emergentes.

No Brasil, país emergente, principalmente, a energia eólica vem crescendo e se destacando devido aos incentivos governamentais e ao avanço tecnológico que a torna competitiva. Por isso acredita-se que a geração eólica possa vir a concorrer economicamente, em curto prazo, com fontes tradicionais de geração de energia.

1.1 Energia Eólica

A energia utilizada através da força do vento é utilizada pelo homem desde os primórdios. Por volta de 3500 a.C. é datada a utilização conhecida mais antiga da força dos ventos, para impulsionar embarcações com velas que transportavam mercadorias ao longo do rio Nilo, no antigo Egito. Por volta de 200 A.C já eram utilizados moinhos rústicos para bombear água na China e moinhos de eixo vertical para moagem de grãos na Pérsia. (Rueda, 2012)

Em meados do século XI, os primeiros moinhos de vento, já adaptados a funcionar com seu eixo horizontal, foram utilizados na Europa. Aprimorados pelos holandeses e ingleses, eram empregados para o bombeamento de água, para o acionamento de serrarias e moagem de grãos.

Os moinhos de vento foram aos poucos sendo desativados com o início da revolução industrial e a utilização de motores a vapor. Com o advento e a popularização da energia elétrica, também ocorreu o desenvolvimento de moinhos de vento maiores para gerar eletricidade. Essas

máquinas apareceram inicialmente na Dinamarca em 1890. Mas o baixo custo da geração elétrica por combustíveis fósseis fez com que o interesse em tal fonte de energia diminuísse. (Rueda, 2012)

Após o declínio dos moinhos, veio a década de 70, e juntamente a fase da crise mundial do petróleo. Aliado a crise, houve um crescimento de interesses de preservação ambiental, que fizeram que a energia eólica voltasse novamente ao cenário. É dessa forma que começam a surgir indústrias de equipamentos específicos para a conversão de energia eólica em energia elétrica. Nesta mesma época, os dinamarqueses investiram em projetos de aerogeradores de pequeno porte para a geração de energia elétrica. Segundo a ANEEL (2008), Agência Nacional de Energia Elétrica, a primeira turbina eólica comercial ligada à rede elétrica pública foi instalada na Dinamarca, em 1976.

Nas Figuras 1.1 e 1.2 são apresentados gráficos de distribuição das usinas eólicas no mundo, primeiro o total de usinas existentes e em expansão a cada ano, depois o total produzido de energia eólica em cada país.

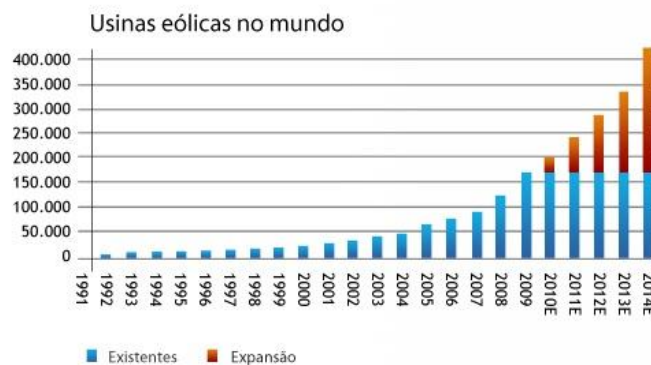


Figura 1.1 – Distribuição das usinas eólicas no mundo (Appio, 2010).

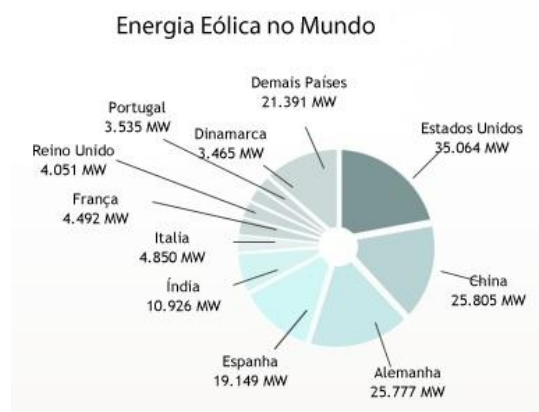


Figura 1.2 – Distribuição das usinas eólicas no mundo por país (Felippes, 2012).

Entretanto, no atual estágio a geração eólica ainda representa um papel secundário no Brasil, sendo a sua capacidade instalada extremamente modesta se comparada com diversos países do mundo.

A energia eólica no Brasil teve seu primeiro indício em 1992 com o início da operação comercial do primeiro aerogerador instalado no Brasil, que foi resultado de uma parceria entre o Centro Brasileiro de Energia Eólica (CBEE) e a Companhia Energética de Pernambuco (CELPE), através de financiamento do instituto de pesquisas dinamarquês Folkecenter. Essa turbina eólica, de 225 kW, foi a primeira a entrar em operação comercial na América do Sul, em 1992, localizada no arquipélago de Fernando de Noronha (Pernambuco).

O Governo Federal Brasileiro apresentou ações para incentivar as fontes alternativas, com destaque para o Programa de Incentivo às Fontes Alternativas de Energia Elétrica – PROINFA, instituído por meio da Lei Federal nº 10.438, de 26 de abril de 2002.

O PROINFA é um instrumento de incentivo a empreendimentos concebidos com base em fontes eólicas, pequenas centrais hidrelétricas – PCH's e biomassa. Além de incentivar o desenvolvimento das fontes renováveis na matriz energética, o PROINFA abriu caminho para a fixação da indústria de componentes e turbinas eólicas no país.

No final de 2009, a Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL promoveu leilão específico para contratação de eletricidade gerada pelos ventos. Foram contratados 71 empreendimentos, totalizando 753 MW médios de energia, com início de operação previsto para 2012 e potência instalada total de 1.805 MW.

Além do PROINFA e dos leilões, a fonte eólica também comercializa sua energia, em uma escala menor, no Mercado Livre onde as condições contratuais são livremente negociadas entre as contrapartes.

Como resultado do PROINFA, dos leilões realizados e do mercado livre, ao final de 2012, o Brasil possui 108 parques eólicos que totalizam 2,5 GW de capacidade instalada.

Atualmente, esta capacidade instalada chega a 5,1 GW, com perspectivas para o final de 2017 indicando 8,7 GW de eólica em operação na matriz elétrica brasileira. (ABEEólica, 2014)

1.2 Descrição de Aerogeradores e seus Componentes

Os aerogeradores são equipamentos que realizam a conversão de energia cinética contida nos ventos em energia elétrica, disponibilizando-a para a rede elétrica em seus terminais de saída. De uma maneira geral, um aerogerador é constituído pela turbina eólica, multiplicador mecânico, gerador elétrico e pelos sistemas de conexão elétrica e controle.

A turbina eólica é composta pelo cubo do rotor ou “*hub*” e pás, e é o componente do aerogerador responsável pela conversão da energia cinética contida nos ventos em energia mecânica de rotação.

De acordo com a orientação do eixo e forma construtiva, as turbinas são classificadas em turbinas de eixo horizontal (TEEH) e turbinas de eixo vertical (TEEV). Ambas podem utilizar a força de arraste ou a força de sustentação produzida pelo vento para se movimentarem. (Wenzel, 2007)

Estas máquinas são utilizadas para a geração de energia elétrica através de acoplamento com geradores, mas também podem ser utilizadas em sistemas de bombeamento ou outros sistemas mecânicos. E quanto a sua potência podem ser definidas como: Pequeno Porte (até 50kW de potência), Médio Porte (potência de 50 a 1000kW), e Grande Porte (acima de 1MW de potência).

As TEEH são as mais utilizadas e comercializadas no mercado, e têm como característica principal a necessidade de um mecanismo que permita o posicionamento do eixo do rotor em relação à direção do vento, para um melhor aproveitamento, principalmente onde se tenha mudança na direção dos ventos. Normalmente, têm melhor rendimento que as TEEV's, pois desenvolvem maior força e potência por unidade de área de captação do vento. As especificações de desempenho destas máquinas vão de poucos Watts até máquinas com sete Mega Watts. (Souza & Bermudez, 2010)

Além disso, são capazes de atingir velocidades de rotação mais elevadas, o que as torna excelentes para aplicações que requerem altas velocidades de rotação, como a geração de energia elétrica.

Elas possuem três componentes básicos, o rotor com as pás, a gôndola (nacele) e a torre. Na gôndola ficam os principais componentes tais como o gerador elétrico, caixa multiplicadora de velocidades, eixos, mancais, sistema de freios sistema de controle e mecanismos de giro da turbina.

O rotor é composto pelas pás, eixo e engrenagens para a transmissão do movimento de rotação para o gerador. As pás de um rotor de eixo horizontal são objetos de estudo de aerodinâmica para otimização de seu emprego em aerogeradores. Em números de uma, duas, três, quatro ou diversas, as pás são elementos aerodinâmicos projetados para produzir forças de sustentação elevadas e pequenas forças de arrasto. (Souza & Bermudez, 2010)

1.3 Contexto Industrial de Turbinas Eólicas de Pequeno Porte

Atualmente existem muitos exemplos de turbinas de pequeno porte. Algumas são desenvolvidas por universidades e outras, por empresas com fins comerciais.

As SWT's (*Small Wind Turbine*) têm como objetivo principal, complementar o sistema principal de energia de uma determinada edificação.

Relativamente às características do rotor, as SWT's são compostas por duas ou mais pás. Quanto aos materiais empregados na fabricação das pás, pode ser utilizada a madeira, devido ao seu baixo custo e fácil fabricação das peças, até materiais poliméricos individuais ou reforçados por materiais compósitos.

Na Figura 1.3, abaixo, é apresentado dois tipos de pás de rotores de uma SWT, uma fabricada com fibra de vidro e a outra com fibra de carbono.

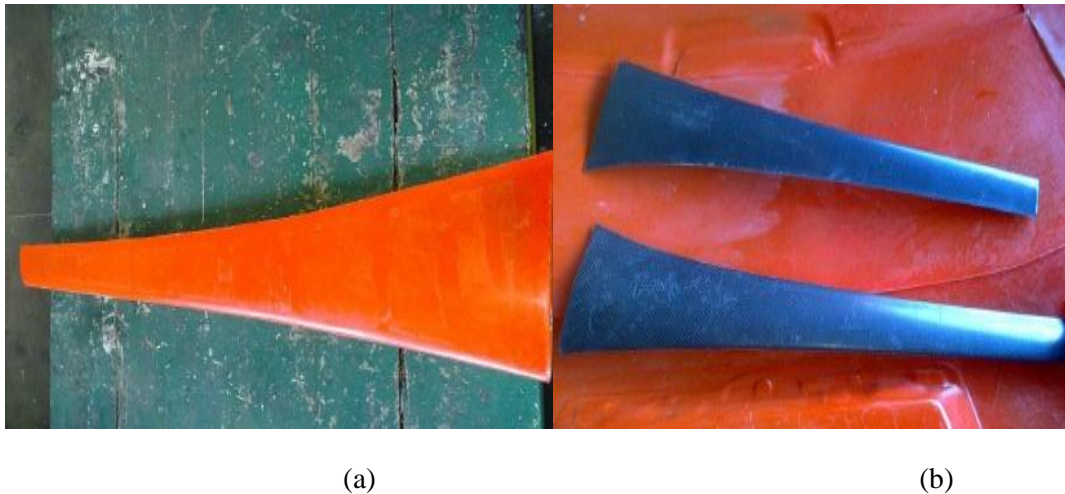


Figura 1.3 – (a) Pá em fibra de vidro (b) Pás em fibra de carbono (Sousa & Bermudez, 2010).

Fazer a análise dinâmica dos componentes sólidos rotacionais, como é o caso dos rotores de turbina eólica, é de suma importância o conhecimento e avaliação do seu momento de inércia, principalmente no contexto industrial e comercial.

As propriedades de inércia de um rotor a ser montado sobre um sistema mecânico complexo, como é o caso de uma turbina eólica, geralmente são avaliadas considerando o rotor como um corpo rígido. O cálculo direto das propriedades de inércia (centro de massa, momento de inércia) pode ser implementado apenas se a distribuição de massa for completamente conhecida.

Tal conhecimento geral da distribuição de massa, não é disponível para geometrias complexas ou desconhecidas, como é o caso dos rotores de turbinas eólicas. Para estas, é necessário se obter o momento de inércia destes corpos de forma experimental.

Diversas técnicas experimentais vêm sendo propostas por pesquisadores para a medição indireta das propriedades de inércia para estes corpos desiguais.

1.4 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo a construção e a validação de uma Bancada experimental para a obtenção do momento inercial de corpos rígidos. Para perspectivas futuras deste projeto de graduação, a Bancada experimental servirá de ensaio para a análise inercial de dois tipos específicos de rotores de uma turbina eólica de eixo horizontal (TEEH) de pequeno porte.

2 IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DA INÉRCIA ROTACIONAL DE CORPOS RÍGIDOS

Tendo um corpo rígido massivo que apresenta movimento translacional, verifica-se que a sua massa está relacionada à resistência em alterar o seu estado de movimento inicial. De forma semelhante, se esse corpo apresenta um movimento rotacional, então surge uma nova resistência a esse movimento, a qual é chamada momento de inércia. Ou seja, o momento de inércia tende a manter a velocidade angular do corpo constante. (Inman, 2007)

É importante, no estudo dinâmico de um corpo rígido, qualificar o seu momento de inércia, pois ele influencia diretamente em requisitos de projeto, como por exemplo, no dimensionamento de um rotor de um aerogerador. Ou seja, é um parâmetro largamente utilizado na mecânica dos sólidos e com aplicação em setores industriais de diversos segmentos. Sua determinação, porém pode se tornar relativamente complicada quando se trata de corpos com geometrias não triviais, fazendo-se necessário a utilização de métodos experimentais em substituição aos cálculos baseados na geometria.

Com o advento de uma variedade de máquinas e equipamentos modernos (tais como a KSR 1320 e a POI 3200M, ambas da fabricante Space Electronics USA e usadas para medições de Momento de Inércia e Centro de Gravidade), atualmente, contribuíram bastante na solução deste propósito. Com esses equipamentos, a maioria dos erros de medição em uso normal pôde ser reduzida. No entanto, projetos envolvendo tais máquinas e equipamentos mais sofisticados requerem investimentos a altíssimos custos. Em operações de baixo orçamento, no caso deste projeto de graduação, a utilização dessas máquinas pode ser o menos adequado, buscando por outros métodos tradicionais e mais simples.

2.1 Revisão Bibliográfica

Genta & Delprete (1994), ao analisar diferentes métodos disponíveis para se obter o momento de inércia em corpos sólidos, dividem estes em duas grandes categorias: oscilatório e acelerado. Eles concluem que os resultados a partir de métodos oscilatórios são menos afetados, pela presença de amortecimento, do que os obtidos usando métodos baseados em aceleração, e que pêndulos multifilares torcionais são geralmente considerados como os mais precisos. Estes são referidos como capazes de produzir resultados com erros inferiores a 1%.

No artigo de Schwartz (1957), foi empregado o uso do pêndulo bifilar torcional extensivamente para a medição do momento de inércia de uma aeronave, este método é

considerado como mais vantajoso e mais simples do que o pêndulo composto. Uma desvantagem óbvia do pêndulo bifilar, como citado, é a sua natureza instável, apenas arranjos limitados de corpos podem ser acomodados no suporte.

Em contraste, pêndulos torcionais a três ou mais fios permitiriam teste em qualquer corpo sólido, pois permitiriam a suspensão de uma placa suportada pelos fios, em que o corpo de prova poderia ser acomodado. Lyons (2002) verificou que o pêndulo multifilar (com mais de três fios suspensos) são submetidos a oscilações transversais podendo apresentar um movimento irregular, com o afrouxamento de alguns fios, afetando negativamente os resultados.

É por esta razão, entre outras, que o arranjo trifilar é a escolha mais utilizada na literatura na medição dos momentos de inércia dos corpos. Investigações detalhadas sobre esta técnica são relatadas por Genta & Delprete (1994) e Lyons (2002), no presente trabalho pretende-se realizar uma análise mais detalhada sobre o referido método.

2.2 Estado da arte

As propriedades inerciais de segmentos do corpo humano, tais como os membros superiores, afetam significativamente na cinética conjunta destes e o controle durante o movimento. Precisas medições de inércia para estes segmentos são fundamentais para o cálculo preciso dos seus parâmetros cinéticos. Para amputados, próteses específicas de corrida ou *running specific prosthesis* (RSP), as propriedades inerciais podem influenciar a mecânica da marcha.

Svercauski (2012) desenvolveu um estudo para determinar as propriedades inerciais para quatro RSP's comerciais, disponíveis em três categorias de rigidez para cada modelo. Utilizou-se o pêndulo trifilar para a obtenção desses valores inerciais, e a validação do sistema foi determinada medindo momentos de inércia de um bloco de alumínio com valores conhecidos. Os momentos de inércia, pela técnica do pêndulo, para os eixos horizontal e vertical do bloco de alumínio, representaram erros de 1% e 0,1% frente aos resultados analíticos encontrados. Na equação preditiva e no pêndulo trifilar medindo as propriedades inerciais das próteses demonstraram uma precisão $\geq 99\%$. Isso sugere que o método e valores apresentados estão dentro das tolerâncias atualmente aceitas para estimativas de propriedades inerciais para estudo de marcha das RSP's. Constatou-se que os erros referentes ao desalinhamento do centro de massa das RSP's sobre a plataforma eram insignificantes e que poderiam ser desconsiderados.

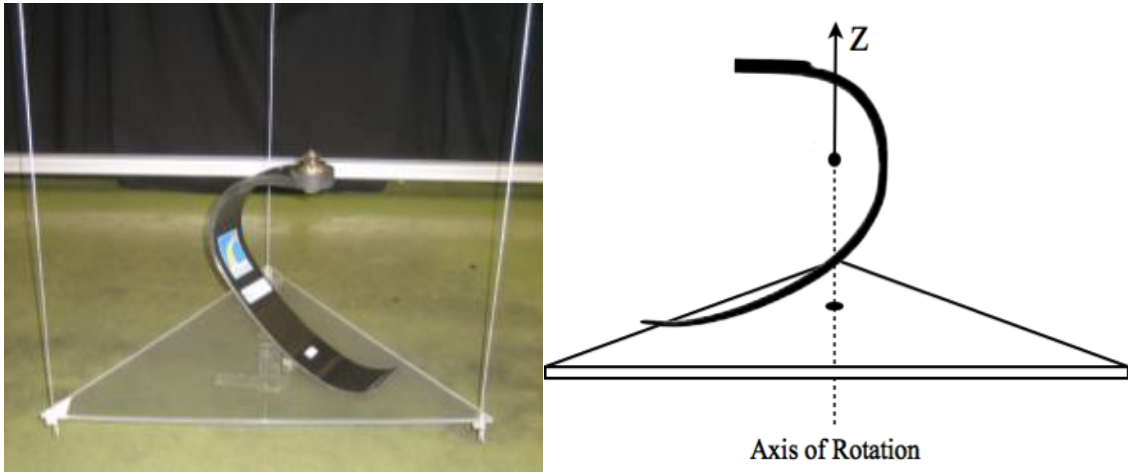


Figura 2.1 – Pêndulo Trifilar com uma RSP. Eixos de rotação primários (eixo z mostrado) estão alinhados com o eixo da plataforma de rotação. (Svercauski , 2012)

Na figura 2.2 é mostrado um pêndulo multifilar torcional, já nas figuras 2.3 e 2.4 mostram dois exemplos de pêndulos trifilares torcionais.

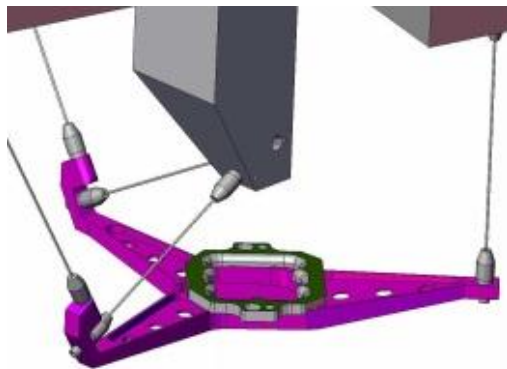


Figura 2.2 – Pêndulo multifilar torcional suspenso por cinco fios. (Swank, 2002)



Figura 2.3 – Modelo mais complexo e moderno de suspensão trifilar, geralmente para maiores dimensões (ex.: motores). (Du Bois, 2007)

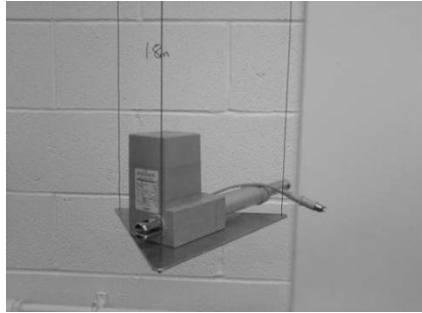


Figura 2.4 – Um atuador sobre uma placa de suspensão trifilar. (Du Bois, 2007)

2.3 Estudos Preliminares

Um estudo feito (Romualdo, 2013) relacionado ao cálculo experimental do momento de inércia de rotores de um aerogerador usando dois conjuntos de pás distintas, são analisadas três metodologias (Métodos do pêndulo físico, pêndulo trifilar torcional, e método “*String and Weight*”) para a obtenção da inércia de rotação dos mesmos.

2.3.1 Método do pêndulo físico

O Método do pêndulo físico consiste em um corpo posto para oscilar (que, no caso, são os conjuntos de pás dos rotores) preso por um de seus pontos, o qual é chamado de pivô, podendo se mover no plano vertical. A Figura 2.5 mostra um corpo rígido preso por um ponto P, podendo girar em torno de um eixo horizontal passando por P.

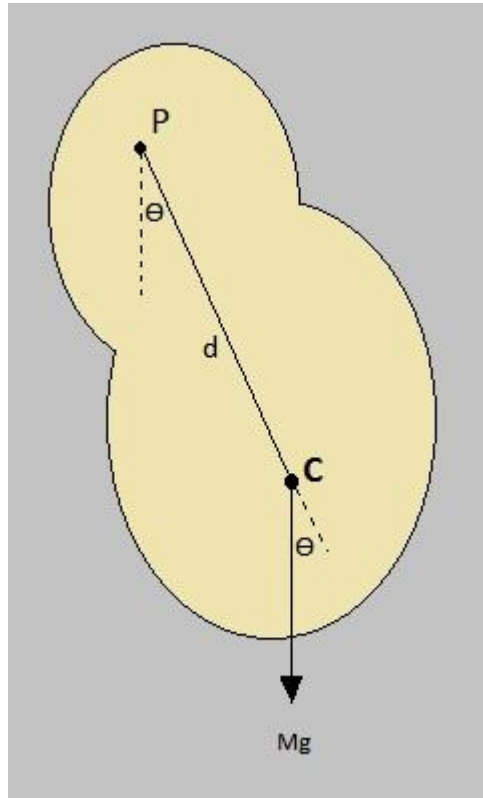


Figura 2.5 – Pêndulo Físico.

Em equilíbrio, a linha OP que liga P ao centro de massa C do corpo é vertical. Quando o corpo é tirado dessa posição, PC faz com a vertical um ângulo e θ a força peso do corpo exerce sobre ele um torque, τ , relativo à P, que tende a tornar PC vertical. O torque é dado por:

$$\tau = -dxMg = -Mgd\text{sen}\theta \quad (1)$$

onde d é o módulo do vetor PC, M é a massa do corpo e g a aceleração da gravidade.

O sinal negativo indica que o torque se opõe ao deslocamento do corpo. O torque é proporcional a $\text{sen } \theta$, mas, para pequenos valores de θ , podemos reescrever a equação (1) como:

$$\tau = -Mgd\theta \quad (2)$$

Então, tal como no pêndulo de torção, a equação de movimento de rotação para o corpo é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{I}\theta \quad (3)$$

ou:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta \quad (4)$$

onde t e ω_0 são respectivamente o tempo e a frequência do movimento harmônico do pêndulo.

Logo:

$$\omega_0^2 = \frac{Mgd}{I} \quad (5)$$

O período T de oscilação do pêndulo físico é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{2\pi \left(\frac{I}{Mgd} \right)} \quad (6)$$

Para amplitudes maiores, o pêndulo físico continua a ter movimento harmônico, mas ele não se comporta como um harmônico simples. A equação (6) pode ser resolvida, onde se permite obter o momento de inércia do corpo, I , pela medida do período de oscilação:

$$I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} \quad (7)$$

Pela bibliografia, o momento inercial total dos rotores seria a soma dos momentos de inércia das três pás que compõem o rotor, calculadas individualmente.

Antes de se iniciar o experimento, encontrou-se o centro de gravidade das pás, através de medições de massa na balança digital e cálculos de balanceamento de momento, e por seguinte, o valor de d (módulo do vetor PC) que seria a distância do ponto de rotação do pêndulo ao centro de gravidade deste, ou seja, o braço onde foi aplicado o momento.

2.3.2 Método “*String and Weight*”

O método “*String and Weight*” é comumente usado para a determinação do momento de inércia de rotação, onde seus componentes são montados da seguinte forma apresentado nas Figuras 2.6 e 2.7:

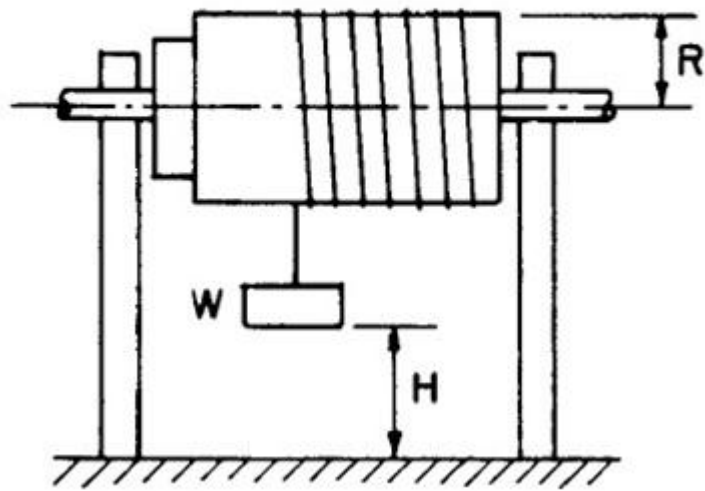


Figura 2.6 – Método “*String and Weight*”.

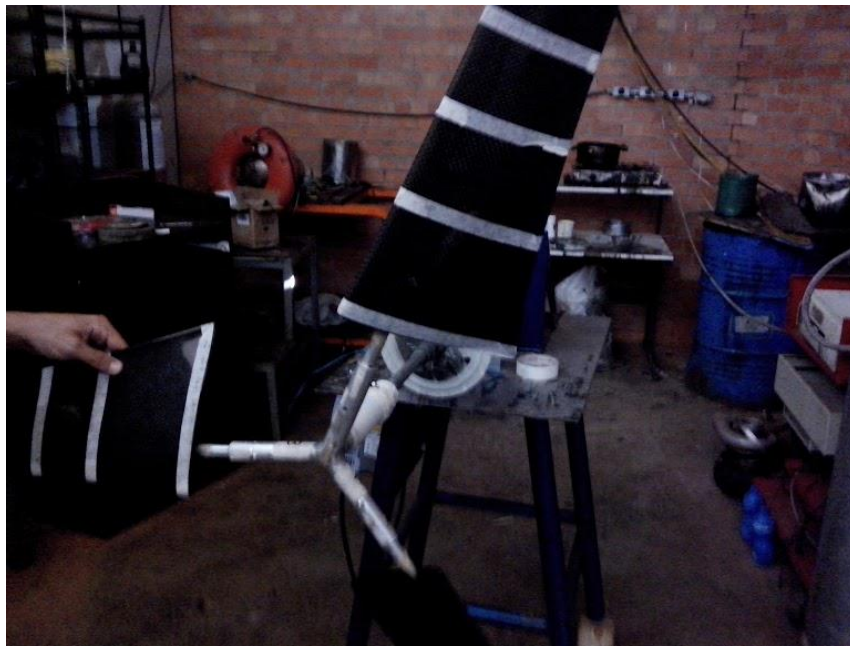


Figura 2.7 – Bancada experimental do Método “*String and Weight*”.

Uma determinada massa W é presa em uma corda, onde esta é enrolada em certo rolamento de raio R , é erguida a uma altura H estabelecida. Após o sistema sair de seu estado de repouso, medindo o tempo necessário para que a massa W percorrer a distância conhecida H a partir de

seu ponto de colocação, o momento de inércia do componente rotativo acoplado no rolamento pode ser estabelecido.

Para este método, pela bibliografia, a seguinte equação foi desenvolvida para o cálculo do momento de inércia, I, do sistema:

$$I = \left[\left(\frac{T^2}{H} \right) - \left(\frac{2}{g} \right) \right] \left(\frac{WgR^2}{2} \right) \quad (8)$$

onde: W é a massa suspensa;

H é a altura de queda da massa;

T é o tempo em que a massa percorre a altura H;

R é o raio do rolamento;

g é a aceleração da gravidade.

Primeiramente, o experimento foi feito coletando os dados para o cálculo inercial do sistema sem o componente rotativo acoplado ao rolamento, no caso, os rotores da turbina. Em seguida obteve-se os dados para o sistema com o rotor acoplado ao rolamento. Assim, o momento de inércia para o rotor avaliado, foi obtido através de uma simples diferença entre o momento de inércia combinado (rotor acoplado ao sistema) e o do sistema puro (sem o rotor).

2.3.3 Resultados

Neste estudo, foi também usado um terceiro método para o cálculo da inércia de giração dos rotores da turbina, o Método do Pêndulo Trifilar Torcional, que será explicado com mais detalhes no subitem 2.4.

A Tabela 2.1 apresenta os valores encontrados de momento de inércia para cada metodologia:

Tabela 2.1 – Resumo dos resultados de inércia de giração para os rotores da turbina.

Resultados finais obtidos de inércia do rotor	Pêndulo Físico [kg.m²]	“String and Weight” [kg.m²]	Pêndulo Trifilar Torcional [kg.m²]

Pás de fibra de carbono	0,273 ± 3,7% [0,263 ; 0,283]	0,797 ± 12,5% [0,697 ; 0,896]	0,306 ± 3,5% [0,295 ; 0,316]
Pás de fibra de vidro	0,645 ± 3,1% [0,625 ; 0,665]	1,240 ± 33,5% [0,824 ; 1,655]	0,673 ± 3,3% [0,651 ; 0,695]

Através da análise dos resultados obtidos, concluiu-se que o método “*String and Weight*” dispersa do valor padrão das inércias calculadas através dos dois outros métodos. A alta incerteza desta metodologia (negligência de alguns parâmetros influenciadores no movimento rotacional do rotor. Ex: Atrito no rolamento e resistência do ar), causaram esta grande discrepância nos valores de inércia de giração.

O Pêndulo físico e o trifilar tiveram resultados finais de momento inercial bem semelhantes para os dois tipos de rotores. Nota-se que os erros experimentais são relativamente mínimos. Ambas as montagens experimentais são pouco influenciadas por efeitos dissipativos ou não lineares. O Método do Pêndulo Trifilar, o mais preciso, e vantajoso, pois atende a diversos tipos e formatos de corpos de prova, devido principalmente a sua estabilidade.

Este estudo serviu como motivação para este projeto de graduação, a fim de explorar mais a fundo o método do pêndulo trifilar, verificando a veracidade da metodologia e suas possíveis falhas. O desenvolvimento de bancadas didáticas experimentais é vista com bons olhos na engenharia, principalmente para aqueles que buscam métodos simples e com um alto potencial de ensino.

2.4 Método do Pêndulo Trifilar Torcional

O método do pêndulo trifilar torcional utiliza uma plataforma suportada por três fios igualmente espaçados em torno do seu centro, como mostrado na Figura 2.8:

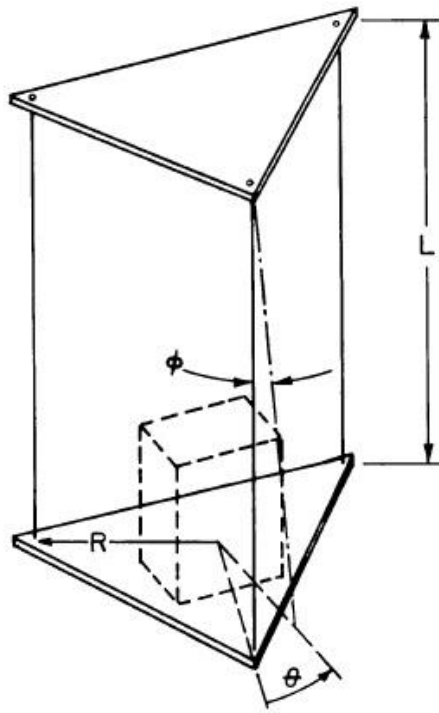


Figura 2.8 – Pêndulo Trifilar Torcional. (Rubin, 1994)

Sobre a plataforma suspensa, coloca-se o corpo de prova a ser avaliado, de modo que o seu centro de gravidade coincida com o centro da plataforma. Após a torção da plataforma sob um pequeno ângulo, o pêndulo trifilar oscilará. Se as oscilações estão limitadas a ângulos mínimos e os fios inextensíveis e rígidos com tamanhos razoáveis, o deslocamento vertical da plataforma pode ser desconsiderado.

O pêndulo trifilar considera movimento harmônico para determinar o momento de inércia de um determinado corpo. Antes do início do experimento, é necessário que seja determinado o centro de gravidade do objeto.

As oscilações sendo cronometradas para obtenção da frequência do pêndulo pode apresentar alguns problemas. Alguns erros consideráveis podem ser introduzidos se este procedimento se não for feito com cuidado. Uma vez que o pêndulo descreve um movimento harmônico, a contagem de ciclos deve ser feita no fim do deslocamento angular, onde a velocidade é zero, e assim a obtenção do respectivo período.

Para determinar as propriedades do sistema completo (a plataforma e o corpo), é necessário que a 2ª Lei de Newton seja satisfeita:

$$\tau = I \ddot{\theta} \quad (9)$$

onde, τ é o torque aplicado ao sistema em um plano horizontal, I é o momento de inércia em torno do eixo vertical que passa pelo centro de massa do corpo e pelo centro geométrico da plataforma, e $\ddot{\Theta}$ é a aceleração angular do sistema.

Nas figuras (2.9a) e (2.9b) é mostrado o deslocamento da plataforma em uma vista superior e em vista lateral, respectivamente:

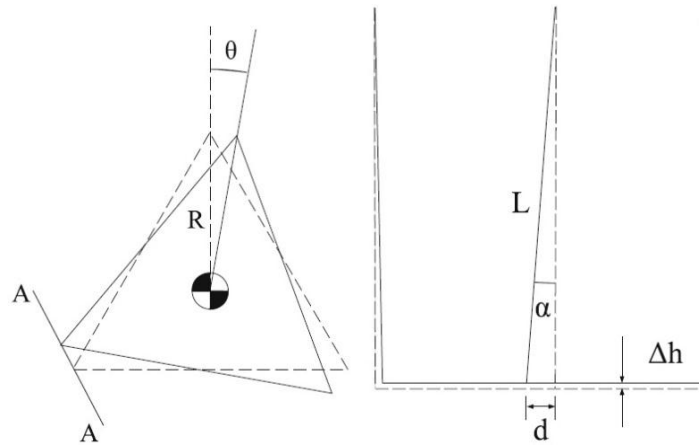


Figura 2.9 – (a) Vista superior (b) Vista lateral através da seção AA. (Du Bois, 2007)

Adotando-se a hipótese dos pequenos deslocamentos:

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad (10)$$

$$\text{cos } \theta \approx 1 \quad (11)$$

$$\text{sen } \alpha \approx \alpha \quad (12)$$

$$\text{cos } \alpha \approx 1 \quad (13)$$

Esses dois ângulos podem ser relacionados com o deslocamento horizontal (d) da placa, na lateral, resultando:

$$L \text{ sen } \alpha = d \quad (14)$$

$$R \text{ sen } \theta = d \quad (15)$$

Então,

$$L\alpha \approx R\theta \quad (16)$$

O deslocamento vertical da placa é dado por:

$$\Delta h = L(1 - \cos\alpha) \quad (17)$$

Logo $\Delta h \approx 0$. O que significa que a altura da placa permanece constante e sua aceleração vertical é zero. Isto permite que o peso suportado por cada um dos três fios (W), possa ser facilmente calculado utilizando uma equação de equilíbrio estático na direção vertical:

$$W = \frac{1}{3}mg(\cos\alpha)^{-1} \approx \frac{1}{3}mg \quad (18)$$

onde m é a massa do sistema e g é a aceleração gravitacional. Na sequência, a força horizontal que age sobre um vértice da plataforma se opõe ao seu deslocamento:

$$F = -W\sin\alpha \approx -\frac{1}{3}mg\alpha \quad (19)$$

E o torque resultante sobre a placa é definido, em termos das três forças laterais e a distância do seu centro até um dos três fios (R), por:

$$\tau = 3RF = -Rmg\alpha \quad (20)$$

Através da equação (16) encontramos:

$$\tau = -\frac{R^2mg}{L}\theta \quad (21)$$

Substituindo (21) em (9) obtém-se a equação de movimento do sistema:

$$\frac{R^2mg}{L}\theta + I\ddot{\theta} = 0 \quad (22)$$

Assumindo um movimento harmônico simples, a solução pode ser encontrada em termos da frequência angular de oscilação (ω):

$$\frac{R^2mg}{L} + \omega^2I = 0 \quad (23)$$

Substituindo $\omega = \frac{2\pi}{T}$ em (23), obtém-se:

$$I = \frac{R^2 m g T^2}{4\pi^2 L} \quad (24)$$

onde T é o período de oscilação.

Então, segundo a bibliografia, no Método do Pêndulo Trifilar, o momento de inércia experimental do corpo de prova, $I_{e,cp}$, é igual à diferença entre os momentos de inércia do conjunto (corpo e plataforma), $I_{e,conj}$, e da plataforma do pêndulo sem o corpo, $I_{e,s}$, da seguinte forma:

$$I_{e,cp} = I_{e,conj} - I_{e,s} \quad (25)$$

Aplicando (25) em (24) para os momentos de inércia:

$$I_{e,cp} = \frac{T_{e,conj}^2 m_{conj} g R^2}{4\pi^2 L} - \frac{T_{e,s}^2 m_s g R^2}{4\pi^2 L} \quad (26)$$

onde:

$T_{e,conj}$ e m_{conj} , são os respectivos valores de período e massa do pêndulo com o corpo.

$T_{e,s}$ e m_s , são os respectivos valores de período e massa do pêndulo sem o corpo.

Através da equação (26) obtida, podemos encontrar o momento de inércia de sólidos de geometria complexa, porém alguns cuidados precisam ser tomados:

- O centro de gravidade do corpo rígido e da plataforma devem estar sobre o eixo de rotação.
- Para que a consideração de que todas as sustentações produzem a mesma força trativa, a plataforma deve estar perfeitamente balanceada.
- Os ângulos de rotação devem ser pequenos para que as aproximações ($\sin \theta = \theta$) sejam verdadeiras.
- O número de ciclos analisados deve ser o maior possível, pois ele vai influenciar numa melhor análise do período, com menos erros, pois uma medida ruim do período gera discrepâncias muito elevadas do valor correto.
- A base superior deve ser perfeitamente rígida, pois, caso contrário, termos de deslocamento relativo devem ser considerados.

3 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Neste tópico será descrito os procedimentos experimentais necessários para obter o momento de inércia de giração. Como exemplo prático, foi adotado como modelo padrão um prisma de ferro com base quadrada homogêneo. Tal determinação experimental é baseada na medição de períodos de oscilação do pêndulo trifilar torcional associados às diversas configurações que serão apresentadas.

Os valores encontrados experimentalmente deverão ser comparados com os valores obtidos analiticamente, verificando a confiabilidade do ensaio da bancada. Uma análise do erro propagado pelo experimento será feito, verificando a qualidade do procedimento executado nos ensaios experimentais.

3.1 Concepção da Bancada Experimental

Para estes ensaios que tem como finalidade a determinação experimental do momento de inércia de corpos regulares e complexos, foi montada uma bancada experimental, conforme descrito no subitem 2.4.

Visando a praticidade para a realização dos ensaios, o tempo hábil disponível, optou-se por uma instrumentação de simples manuseio, baixo custo, e de simples aquisição, já que a maioria das instrumentações utilizadas foram disponibilizadas pelo Departamento de Engenharia Mecânica da UnB.

A bancada experimental do pêndulo foi construída seguindo os mesmos padrões sugeridos na literatura sobre o método do pêndulo trifilar torcional.

A bancada consiste numa plataforma triangular equilátera fabricada de madeira suportada por três fios rígidos de nylon de comprimentos iguais, igualmente espaçados em torno de seu centro geométrico, que são presos a um suporte fixo também de madeira.

Sobre a plataforma suspensa, coloca-se o corpo de prova a ser avaliado, de modo que o seu centro de gravidade coincida com o centro da plataforma. Após a torção da plataforma sob um pequeno ângulo, o pêndulo trifilar oscilará. Se as oscilações estão limitadas a ângulos mínimos e as cordas são de tamanhos razoáveis, o deslocamento vertical da plataforma pode ser desconsiderado.

Lembrando que o modelo de bancada considera as seguintes aproximações:

- Fio inextensível;
- Ausência de amortecimento do ar;
- Pequenos ângulos de oscilação.

Nas figuras 3.1 e 3.2 mostram algumas imagens da bancada experimental construída e implantada no laboratório de vibrações no bloco G.



Figura 3.1 – Bancada Experimental.



Figura 3.2 – Corpo de prova sendo testado na Bancada Experimental.

3.2 Estudo de propagação de incertezas

Os erros no procedimento do Pendulo Trifilar Torcional podem ser divididos em duas categorias. A primeira categoria de erro é causada pela precisão da configuração inerente ao experimento (massa do pêndulo, comprimento dos fios, câmera, medições), e a outra categoria é decorrente da centralização inadequada do corpo, ou seja, o centro de massa do corpo não coincidente com o eixo de oscilação produzirá outro tipo de movimento de oscilação do pêndulo.

Esta última categoria, para os ensaios na Bancada experimental, primeiramente será desconsiderada. Assumiu-se que o centro de gravidade do corpo rígido e da plataforma devem estar sobre o eixo de rotação, pois tanto o centro de massa do corpo quanto o centro geométrico da plataforma são encontrados trivialmente, porque se tratam de corpos regulares e homogêneos.

Du Bois (2007) trata em seu artigo de uma análise de erros usando pêndulo trifilar torcional referentes ao efeito do desalinhamento do centro de massa do corpo de prova ao centro da plataforma. Conforme suas análises e cálculos, ele verificou que o alinhamento preciso do centro de massa do corpo a ser testado com o centro geométrico da plataforma é insignificante em comparação com a precisão de outras medições necessárias requeridas nos cálculos. Então, partimos para a estimativa de propagação dos erros focada na primeira categoria citada.

O momento de inércia, como a maioria das grandezas físicas não pode ser medida a partir de uma única observação direta. O procedimento envolve geralmente dois passos distintos. Um primeiro passo que consiste na determinação experimental de uma ou mais grandezas que podem ser medidas diretamente. Num segundo passo, efetua-se então o cálculo da grandeza pretendida recorrendo aos valores medidos. Nestas experimentações, seguiremos este modelo de dois passos, onde a estimativa dos erros fará parte de tal procedimento. Em primeiro lugar, devemos estimar os erros nas grandezas medidas diretamente e, posteriormente, determinar como é que esses erros se propagam através dos cálculos para originar o erro no resultado final.

Para uma melhor compreensão da forma analítica da lei de propagação de erros considera-se o caso mais simples de uma função com uma única variável, $f(x)$. Admite-se que a grandeza x está afetada por um erro Δx . O correspondente erro em f , Δf , é dado pela expressão,

$$\lim(\Delta x \rightarrow 0) (\Delta f / \Delta x) = df/dx \quad (27)$$

ou seja,

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x \quad (28)$$

A lei da propagação dos erros relativa a uma função de uma única variável evidencia que o erro em f é proporcional ao erro em x , sendo a constante de proporcionalidade a primeira derivada de f .

No caso dos ensaios realizados na bancada, a inércia rotacional dos corpos rígidos se apresenta como uma função multivariável. Considerando este caso através da lei de propagação de erros, temos:

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (29)$$

Que apresentam erros Δx_i . O erro em f devido aos erros Δx_i pode ser calculado através da expressão geral:

$$\Delta f \approx \Delta x_1 \left(\frac{df}{dx_1} \right) + \Delta x_2 \left(\frac{df}{dx_2} \right) + \dots + \Delta x_x \left(\frac{df}{dx_x} \right) \quad (30)$$

Que constitui um limite superior do erro em f.

Assim, a lei da propagação de erros aplicada ao momento de inércia procurado nos ensaios da Bancada tem a forma:

$$\Delta I \approx \left(\frac{dI}{dR} \right) \Delta R + \left(\frac{dI}{dm} \right) \Delta m + \left(\frac{dI}{dT} \right) \Delta T + \left(\frac{dI}{dL} \right) \Delta L \quad (31)$$

Desenvolvendo as seguintes derivadas e ajustando às nomenclaturas descritas anteriormente,

$$\Delta I \approx \left(\frac{2RmgT^2}{4\pi^2L} \right) \Delta R + \left(\frac{R^2gT^2}{4\pi^2L} \right) \Delta m + \left(\frac{2R^2mgT}{4\pi^2L} \right) \Delta T + \left(-\frac{R^2mgT^2}{4\pi^2L^2} \right) \Delta L \quad (32)$$

Substituindo (24) em (32) tem-se:

$$\Delta I \approx \frac{2}{R} \left(\frac{R^2mgT^2}{4\pi^2L} \right) \Delta R + \frac{1}{m} \left(\frac{R^2mgT^2}{4\pi^2L} \right) \Delta m + \frac{2}{T} \left(\frac{R^2mgT^2}{4\pi^2L} \right) \Delta T - \frac{1}{L} \left(\frac{R^2mgT^2}{4\pi^2L} \right) \Delta L \quad (33)$$

$$\frac{\Delta I}{I} \approx \frac{2}{R} \Delta R + \frac{1}{m} \Delta m + \frac{2}{T} \Delta T - \frac{1}{L} \Delta L \quad (34)$$

Como primeiro teste fizemos uma análise dos erros propagados buscando dados do experimento realizado em (Romualdo, 2013) para a obtenção da inércia dos corpos utilizando a seguinte instrumentação mostrada na Tabela 3.1:

Tabela 3.1 – Descrição dos equipamentos utilizados nos ensaios.

Instrumento	Erro instrumental	Grandeza a ser medida
Balança digital Sartorius 2351	$\pm 2,0$ g	Massa da plataforma do pêndulo e dos corpos.
Trena	$\pm 0,5$ mm	Dimensões da plataforma e comprimento do fio.
Paquímetro	$\pm 0,025$ mm	Dimensões dos modelos padrão escolhido.
Cronômetro	$\pm 0,01$ s	Período de oscilação.

Obtemos os seguintes resultados na propagação de erros, conforme a equação (34):

$$\Delta I \approx (0,135) \Delta R + (0,061) \Delta m + (0,781) \Delta T + (0,023) \Delta L \quad (35)$$

Analisando os resultados obtidos, implica dizer que o período foi o fator mais significativo no estudo do erro final da inércia do corpo, com uma margem de influência de 78,1%. Fato este explicado pelo uso do cronômetro para a obtenção deste. Além do erro instrumental desta ferramenta, há um erro aleatório maior, este chamado de erro sistemático observacional, que é devido a falhas de procedimento do observador durante o experimento.

Disparar um cronômetro sempre atrasado na medida de um intervalo de tempo é um exemplo deste tipo de erro.

Erro deste tipo pode ser reduzido seguindo-se cuidadosamente os procedimentos corretos para o uso dos instrumentos. Entretanto, mesmo que os procedimentos sejam minuciosamente seguidos, ainda poderá existir erro sistemático devido às limitações humanas. O tempo de reação do ser humano a um estímulo é da ordem de:

$$\tau = 0,1 \text{ s (tempo de reação humana)}$$

Assim, uma medida de tempo com cronômetro acionado manualmente pode apresentar erro sistemático desta ordem de grandeza. Analogamente, a resolução típica do olho humano normal é da ordem de:

$$\theta = 0,008^\circ = 0,00014 \text{ rd (resolução do olho humano)}$$

Isto significa que o olho humano pode distinguir dois pontos separados de 0,14 mm a 1m de distância.

Portanto buscamos achar um novo instrumento que aumentasse a precisão do período obtido no experimento da bancada, provada a significativa influência deste parâmetro no erro total da inércia obtida do corpo.

3.3 Uso do software *Tracker*

A influência na determinação do período no erro experimental no estudo da propagação de erros é significativa. Para solucionar esta questão, utilizamos o *software Tracker*, que através de um vídeo análise obtém-se o período do pêndulo.

O programa *Tracker* (Brown, 2009) permite realizar análise de vídeos quadro a quadro, graças ao que é possível o estudo de diversos tipos de movimento a partir de filmes feitos com câmaras digitais ou webcams de computadores comuns e telefones celulares. Trata-se de um medidor de parâmetros mecânicos do movimento (trajetória, velocidade e aceleração) com base em algoritmos de visão computacional aplicados a vídeos de objetos em movimento. É um software livre ligado ao projeto *Open Source Physics* (OPEN SOURCE PHYSICS, 2011), este relacionado ao desenvolvimento de programas com códigos abertos destinados ao ensino de física.

Dentre as alternativas já existentes de vídeo análise, o software *Tracker* foi apresentado com perspectivas e resultados promissores. (Oliveira, 2013)

Uma das vantagens da vídeo análise com o *Tracker* advém da simplificação dos procedimentos e da eliminação de algumas tarefas intermediárias como, por exemplo, a coleta dos dados de posição e tempo do movimento oscilatório de um pêndulo. O uso do *Tracker* permite integrar essas medidas, uma vez que o software fornece automaticamente os valores de distância a partir de uma escala padrão. O software também identifica automaticamente a quantidade de quadros por segundo empregadas pela câmera digital usada (o que permite o uso de câmeras digitais diversas). Além disso, os dados de posição e tempo são apresentados em uma tela que possibilita a análise e manipulação desses dados de forma simples e rápida. Por esse motivo, dentre outros, a proposta do *Tracker* é adequada ao projeto, além de ser um software livre, permitindo uma série de iniciativas relacionadas à sua apropriação pelos usuários, como, por exemplo, a distribuição gratuita de cópias do programa, e a elaboração de diversos manuais de utilização.

3.4 Erro relativo do período

Através do *Tracker*, obtemos 150 períodos para cada ensaio do pêndulo trifilar, e para avaliar o resultado, utilizamos um outro parâmetro, que é o cálculo do desvio padrão amostral para um número de N de medidas:

$$\sigma_T = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(T_i - T_m)^2}{N - 1}} \quad (36)$$

Que indica o quanto os valores medidos estão dispersos em relação à média.

Este desvio-padrão será utilizado para calcular o desvio-padrão da média:

$$\sigma_{T_m} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} \quad (37)$$

O desvio-padrão da média costuma ser utilizado para representar a medida de uma grandeza:

$$T_m = T_m \pm \sigma_{T_m}, \quad (38)$$

e os resultados obtidos serão escritos dessa forma.

E por fim, não menos importante, com o desvio-padrão da média será calculado o erro relativo $\frac{\sigma_{T_m}}{|T_m|}$, "que caracteriza a precisão de um resultado, é uma indicação da qualidade de um experimento." (Santoro, 2008)

A tabela 3.2 resume os parâmetros utilizados:

Tabela 3.2 – Parâmetros estatísticos.

Parâmetro	Símbolo
Média	T_m
Desvio padrão amostral	σ_T
Desvio padrão da média	σ_{T_m}
Erro relativo	$\frac{\sigma_{T_m}}{ T_m }$

3.5 Caso Particular

Como reforço a validação da bancada experimental, usamos uma particularidade do método do pêndulo trifilar torcional, o método do pêndulo bifilar torcional.

Esse pêndulo é composto por uma plataforma suspensa por dois fios paralelos, rígidos e inextensíveis. Esse sistema executa um movimento oscilatório torcional ao longo de um eixo

vertical que passa pelo centro da plataforma, realizando, assim, um deslocamento angular. Durante o procedimento, coloca-se o corpo de prova sobre a plataforma coincidindo seu centro de gravidade com o centro da plataforma, em seguida imprime-se um movimento oscilatório a pequenos ângulos, restringindo o movimento ao plano horizontal e arbitrando um deslocamento vertical desprezível. Nas Figuras 3.3 e 3.4 mostram o modelo do pêndulo e suas características:

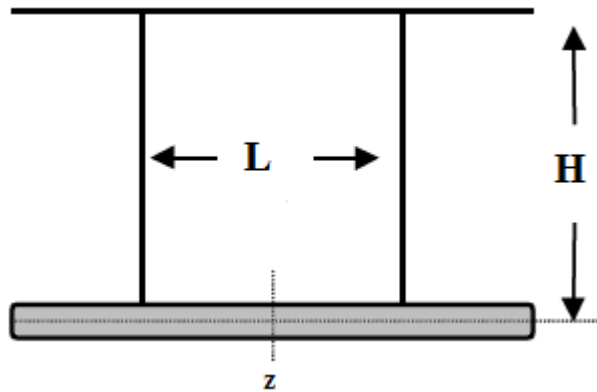


Figura 3.3 – Modelo do pêndulo bifilar torcional. Movimento oscilatório em torno do eixo vertical z . Observa-se a plataforma sustentada por dois fios verticais de comprimento H , e distantes entre si pelo comprimento L .



Figura 3.4 – Bancada experimental suspensa pelos dois fios utilizada durante a realização do experimento.

Em (Oliveira, 2014) obtemos os dados e resultados experimentais do mesmo prisma avaliado na bancada do pêndulo trifilar para a comparação dos dois métodos. Na Figura 3.5 mostra um gráfico $T^2 \times H$ a fim de avaliar o comportamento do período de oscilação do pêndulo em relação ao comprimento H dos fios.

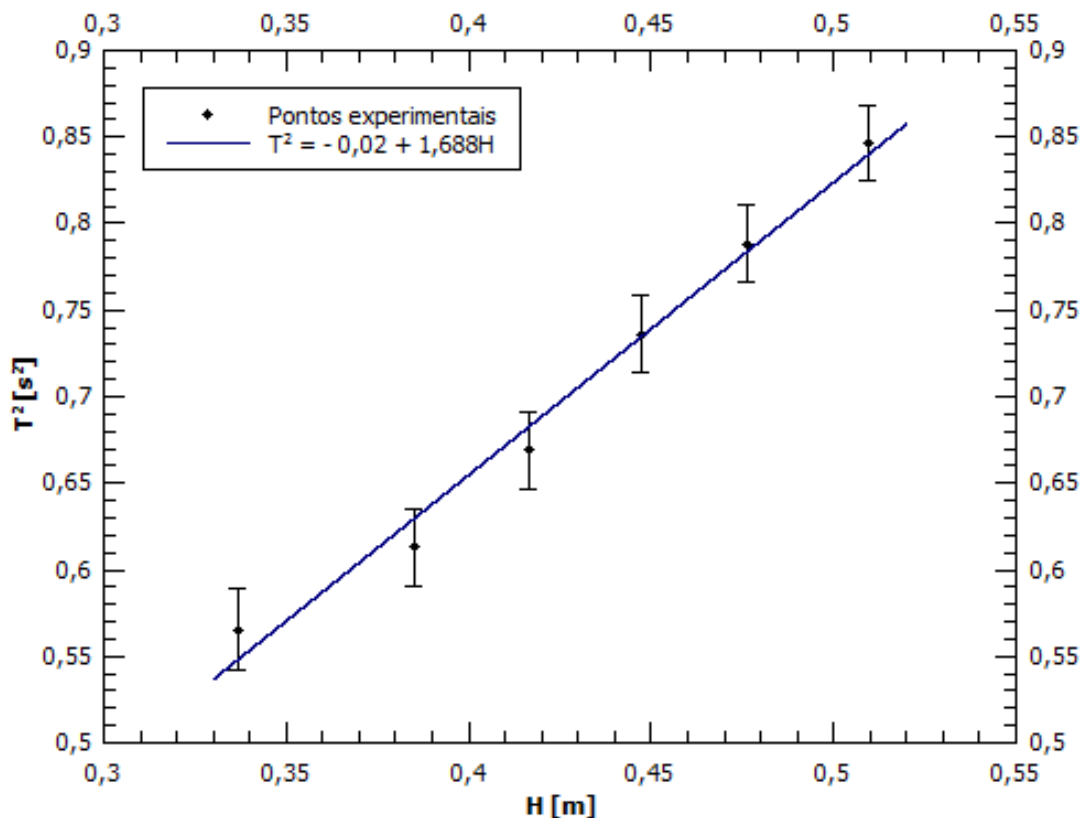


Figura 3.5 – Dependência entre o período de oscilação e o comprimento dos fios. Curva azul ajustada pelo método dos mínimos quadrados. (Oliveira, 2014)

Lembrando que o método do pêndulo bifilar foi escolhido como parâmetro de comparação a partir do estudo feito por Genta & Delprete (1994), que ao analisarem diferentes métodos disponíveis para se obter o momento de inércia em corpos sólidos complexos concluíram que os resultados a partir de métodos oscilatórios, mais precisamente em pêndulos multifilares são os mais precisos, capazes de produzir resultados com erros inferiores a 5%.

4 RESULTADOS DA VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DA BANCADA

A presente etapa aborda a experimentação no laboratório: as medições e análise de períodos pelo *software Tracker*. A caracterização do sinal oscilatório do pêndulo é feita por métodos analíticos e experimentais para se obter a inércia experimental do corpo obtido pela bancada construída. São realizados três testes: (a) prisma (b) rotor de turbina hidrocínética (c) rotor de turbina eólica.

4.1 Caracterização do sinal – Pêndulo Trifilar

A Figura 4.1 representa a medida da trajetória do pêndulo comparada a curva teórica ajustada. Nota-se um bom ajuste entre a curva teórica, e os pontos experimentais medidos. Os parâmetros desta curva são frequência, $f = 0,0843$ Hz, e amplitude máxima, $A_{máxima} = 0,029$ m. O ajuste dos dados ao modelo teórico por mínimos quadrados resultou num coeficiente de correlação de Pearson de $\rho = 96,2\%$, e um desvio padrão do ajuste de $\sigma = 9,12 \times 10^{-3}$ m.

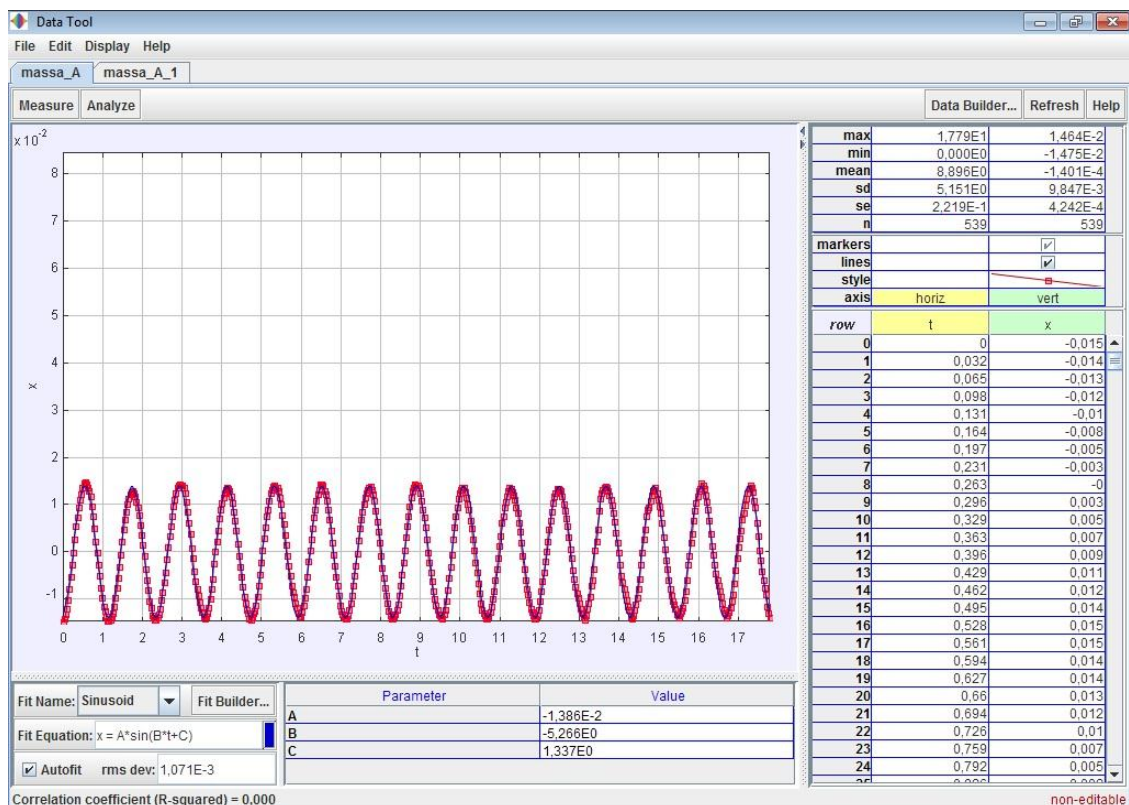
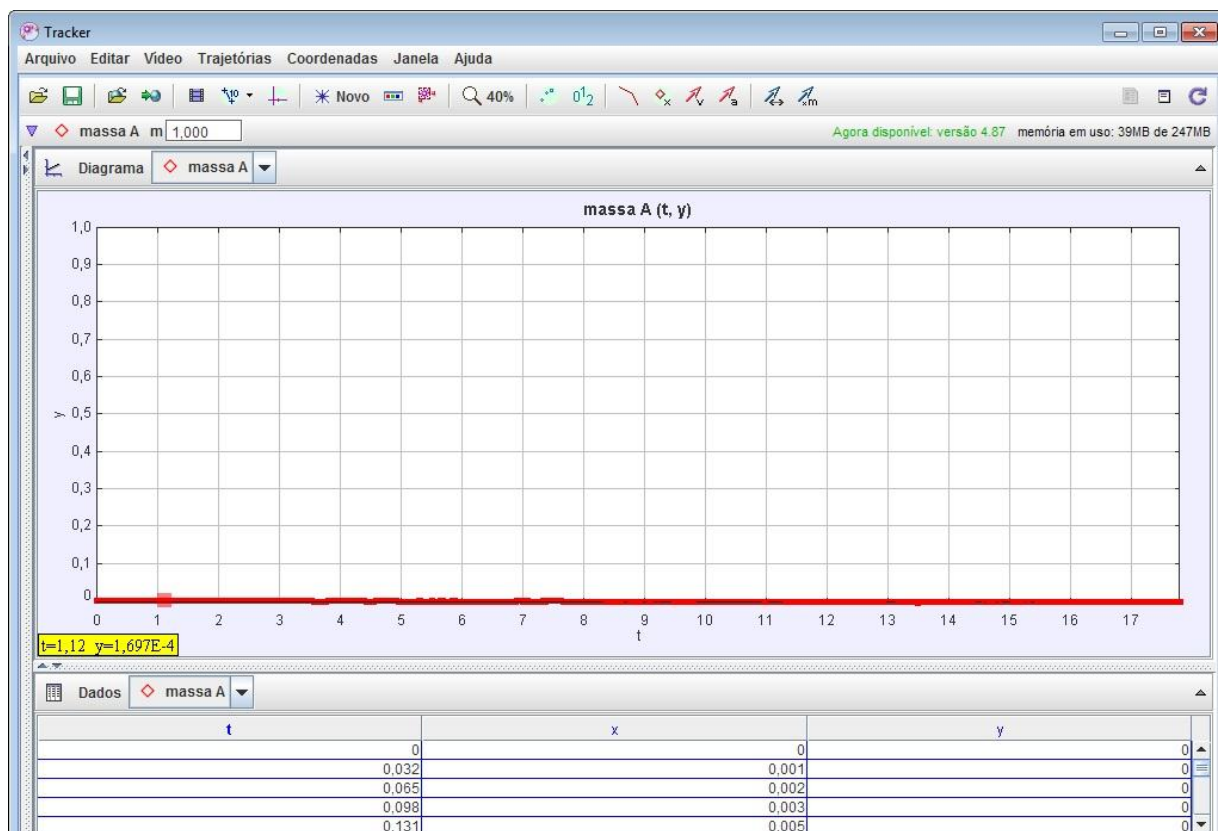


Figura 4.1 – Ajuste do modelo teórico senoidal às medidas obtidas com o *Tracker*. Os pontos em vermelho representam as medidas; a linha azul, o ajuste.

O amortecimento das oscilações do pêndulo torcional ocorre, principalmente, por conta dos efeitos da resistência do ar sobre os componentes do pêndulo (fio e massa). A diminuição das amplitudes de oscilação está relacionada à perda da energia mecânica total armazenada no pêndulo. No pêndulo experimentado não foi verificada variação significativa da amplitude de deslocamento durante a oscilação no intervalo de 15 períodos completos, tornando o amortecimento quase nulo.

Na Figura 4.2, é mostrado o deslocamento vertical da plataforma do pêndulo, Δh , onde no experimento da Bancada obteve um $\Delta h_{m\acute{a}ximo}$ de $4,3 \times 10^{-3}$ m. Este deslocamento máximo obtido é considerado insignificante diante do comprimento dos fios (0,24% em relação ao tamanho dos fios). Então, é razoável as aproximações do método descrito na bibliografia que considera que a altura da plataforma permanece constante e sua aceleração vertical zero, permitindo a simplificação dos cálculos do peso suportado por cada um dos três fios (W), utilizando equação (10) de equilíbrio estático na direção vertical.



(a)



(b)

Figura 4.2 – Gráficos do deslocamento vertical da plataforma do pêndulo trifilar obtido pelo *software Tracker*.(a) gráfico na escala 1E0 (b) gráfico na escala 1E-3.

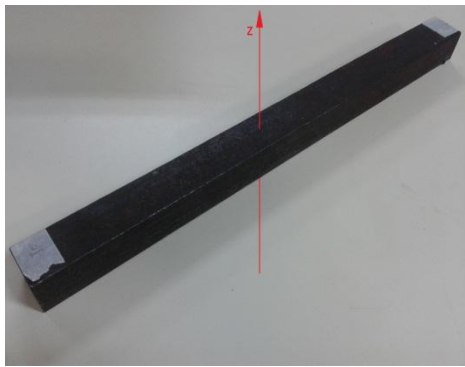
4.2 Prisma

O corpo rígido regular a ser determinado na bancada experimental foi um prisma de ferro de base quadrada. Obteve-se resultados de inércia de rotação do prisma através do cálculo analítico, do método do pêndulo bifilar, e do método do pêndulo trifilar.

4.2.1 Resultados Analíticos

A tabela 4.1 a seguir são apresentadas algumas das especificações do corpo de prova.

Tabela 4.1 – Especificações do prisma quadrado regular.

Corpo	Características	Ilustração	Momento de inércia (Analítico) em relação ao eixo z
Prisma quadrado	$a = 0,0255 \pm 0,09\% \text{ m}$ $b = 0,0255 \pm 0,09\% \text{ m}$ $c = 0,3365 \pm 0,01\% \text{ m}$ $m = 1,652 \pm 0,12\% \text{ kg}$		$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$

O momento de inércia analítico foi calculado com base nas equações matemáticas para geometrias simples já apresentadas na Tabela 4.1.

O momento de inércia analítico do prisma $I_{a,p}$ é calculado por:

$$I_{a,p} = \frac{1}{12} m_p (a^2 + b^2) = 15,632 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (39)$$

Utilizando a propagação de erros, a incerteza no momento de inércia analítico do prisma será:

$$\Delta I_{a,p} = \left(\frac{\Delta m_p}{m_p} + \frac{2\Delta a}{a} + \frac{2\Delta b}{b} \right) I_{a,p} = 0,052 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (40)$$

4.2.2 Resultados Experimentais

Para obtenção da inércia experimental, fizemos o ensaio do prisma na bancada experimental construída. A instrumentação necessária para a determinação do período do pêndulo trifilar com o prisma foi uma câmera digital. O programa *Tracker* foi utilizado para o processamento do sinal. Os experimentos foram realizados com uma câmera de resolução de filmagem de 640 x

480 pixels e taxa de aquisição de 30 quadros por segundo (fps). A partir dessas especificações foi possível uma descrição completa do movimento.

A Figura 4.3 mostra a tela do programa *Tracker* no experimento com o prisma. Os dados são capturados e exportados para uma planilha com os valores da trajetória adquiridos.

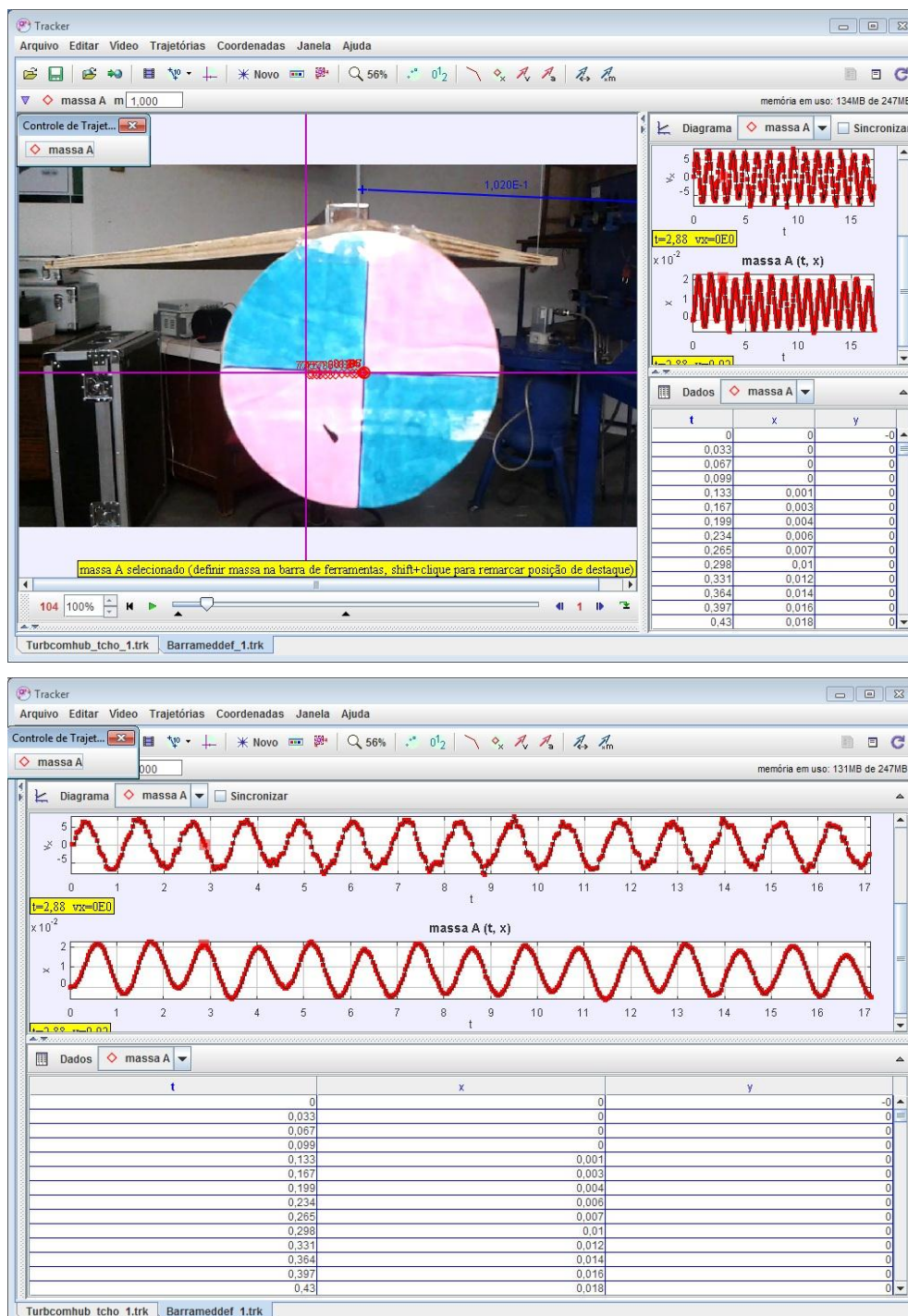


Figura 4.3 – Vista do programa *Tracker* referente ao experimento do prisma na bancada.

O movimento do pêndulo foi filmado por quinze períodos consecutivos. Produziu-se aproximadamente 740 pontos medidos de trajetória.

Foram feitos 10 vídeos para cada procedimento (bancada sem e com o corpo) e obtido um período médio. A discrepância máxima do período nessas dez vídeos análise para esses dois procedimentos foram mínimas (0,35%) e incluídas no erro relativo do período associado ao experimento.

Nas Figuras 4.4 e 4.5, os dados experimentais são apresentados através de gráficos onde o eixo horizontal representa o número da medida e o eixo vertical indica o valor medido para o período.

BANCADA SEM O PRISMA:

Os resultados para este experimento estão expressos no gráfico da Figura 4.4:

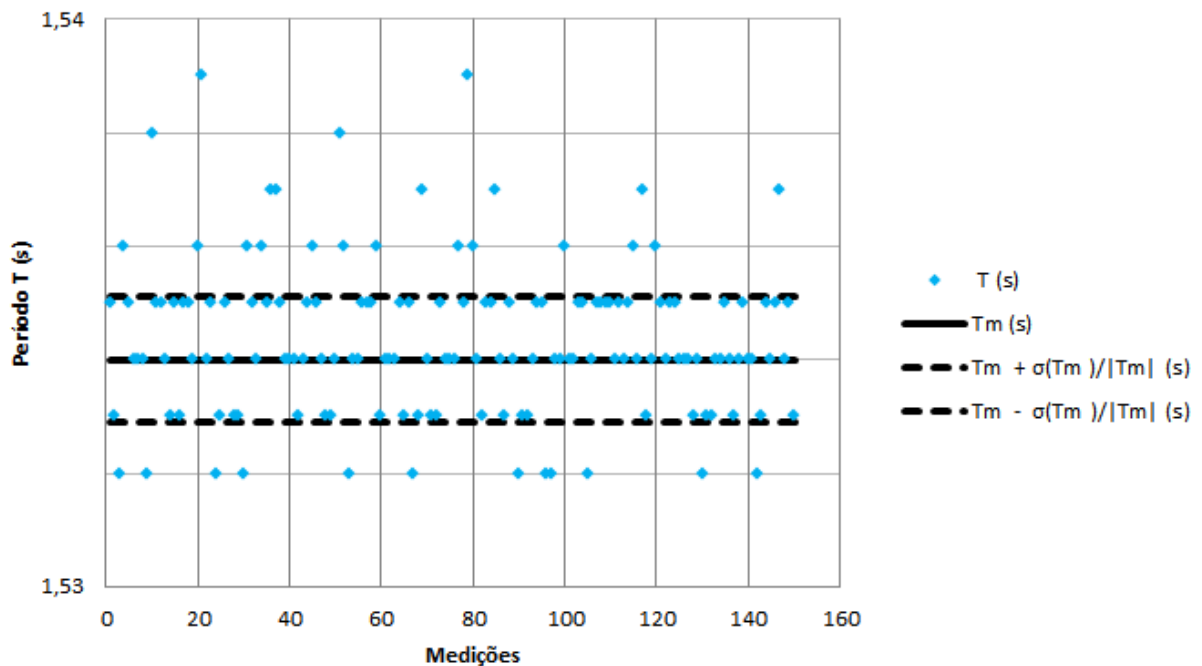


Figura 4.4 – Período de oscilação experimental para a bancada sem o corpo.

Os seguintes parâmetros estatísticos para o período do pêndulo foram descritos na Tabela 4.2 para facilitar a análise destes dados.

Tabela 4.2 – Parâmetros do experimento.

Parâmetro	Valor (s)
T_m	1,534
σ_T	0,0034
σ_{T_m}	0,0015
$\frac{\sigma_{T_m}}{ T_m }$	0,0011

BANCADA COM O PRISMA:

Os resultados para este experimento estão expressos no gráfico da Figura 4.5:

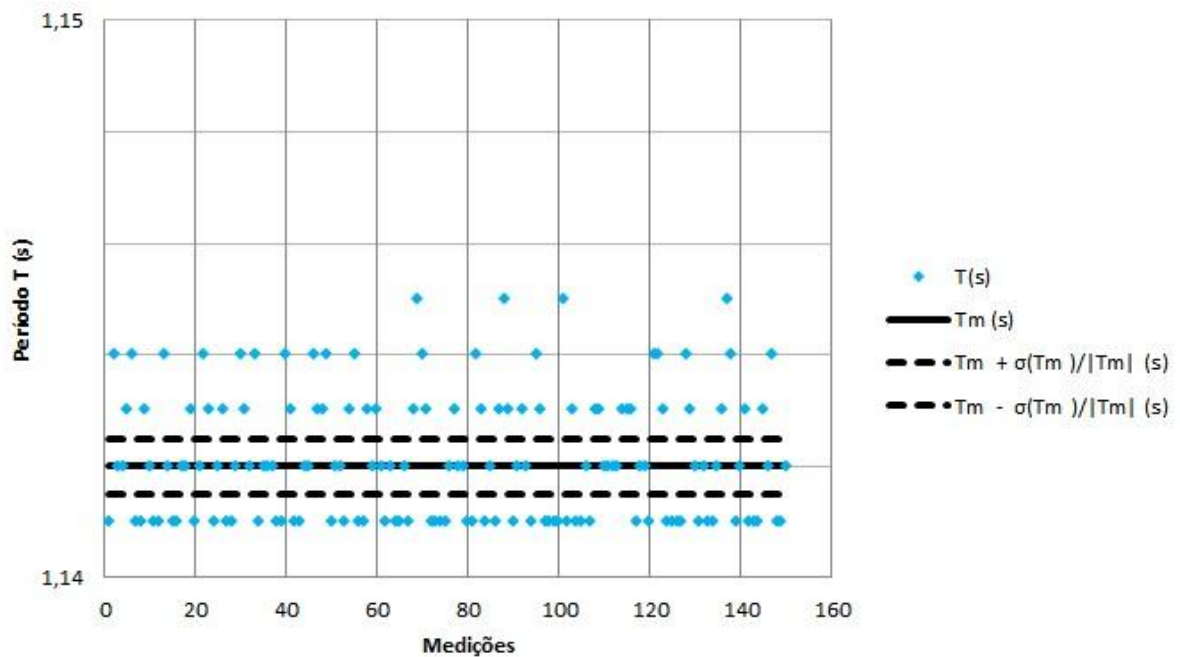


Figura 4.5 – Período de oscilação experimental medido para a bancada com o corpo ensaiado (prisma).

A análise dos dados resulta nos seguintes parâmetros:

Tabela 4.3 – Parâmetros do experimento com o prisma.

Parâmetro	Valor (s)
T_m	1,142
σ_T	0,0014
σ_{T_m}	0,0006
$\frac{\sigma_{T_m}}{ T_m }$	0,0005

Concluídas as etapas experimentais da bancada vazia e com o prisma, foram registrados os seguintes dados dos experimentos na Tabela 4.4:

Tabela 4.4 – Dados Experimentais.

Distância (R) = 0,295 ± 0,0005 m
Comprimento do fio (L) = 1,764 ± 0,001 m
Massa do pêndulo sem o corpo (m_s) = 0,844 ± 0,002 kg
Massa do pêndulo com o corpo (m_{conj}) = 2,496 ± 0,002 kg
Período do pêndulo sem o prisma ($T_{e,s}$) = 1,534 ± 0,003 s
Período do pêndulo com o prisma ($T_{e,conj}$) = 1,142 ± 0,003 s
$g = 9,7808439 \text{ m/s}^2*$

(*) A aceleração gravitacional local do laboratório de vibrações da UnB é $g = 9,7808439 \text{ [m/s}^2\text{]}$.

O momento de inércia experimental do prisma, $I_{e,p}$, é calculado com o auxílio dos dados experimentais (Tabela 4.4) pela equação (26):

$$I_{e,p} = \frac{T_{e,conj}^2 m_{conj} g R^2}{4\pi^2 L} - \frac{T_{e,s}^2 m_s g R^2}{4\pi^2 L} = 15,512 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (41)$$

Através da propagação de erros, a incerteza no momento de inércia experimental do prisma é prescrita por:

$$\Delta I_{e,p} = \left[\left(\frac{2\Delta T_{e,conj}}{T_{e,conj}} + \frac{\Delta m_{conj}}{m_{conj}} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{\Delta L}{L + \Delta L} \right) + \left(\frac{2\Delta T_{e,s}}{T_{e,s}} + \frac{\Delta m_s}{m_s} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{\Delta L}{L + \Delta L} \right) \right] I_{e,p} \quad (42)$$

$$\Delta I_{e,p} = 0,305 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ao término da primeira etapa experimental, foram obtidos os valores numéricos experimentais para o momento de inércia do prisma e seu erro experimental associado. Logo, a Tabela 4.5 registra os valores analíticos e experimentais do momento de inércia do pêndulo trifilar (registrando também os resultados do método do pêndulo bifilar em (Oliveira, 2014)), e na Figura 4.6 um gráfico mostrando os valores inerciais analíticos e experimentais obtidos junto a sua margem de imprecisão.

Tabela 4.5 – Valores numéricos analíticos e experimentais identificados para o momento de inércia do prisma.

Método Analítico	Método do Pêndulo Trifilar	Método do Pêndulo Bifilar	Discrepância entre o Método Analítico e o Método do Pêndulo Trifilar
$I_{a,p} [10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	$I_{e,p} [10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	$I_{e,p} [10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2]$	σ (%)
15,632 ± 0,33% [15,580 ; 15,683]	15,512 ± 1,97% [15,206 ; 15,817]	15,062 ± 2,46% [14,504 ; 15,514]	0,77

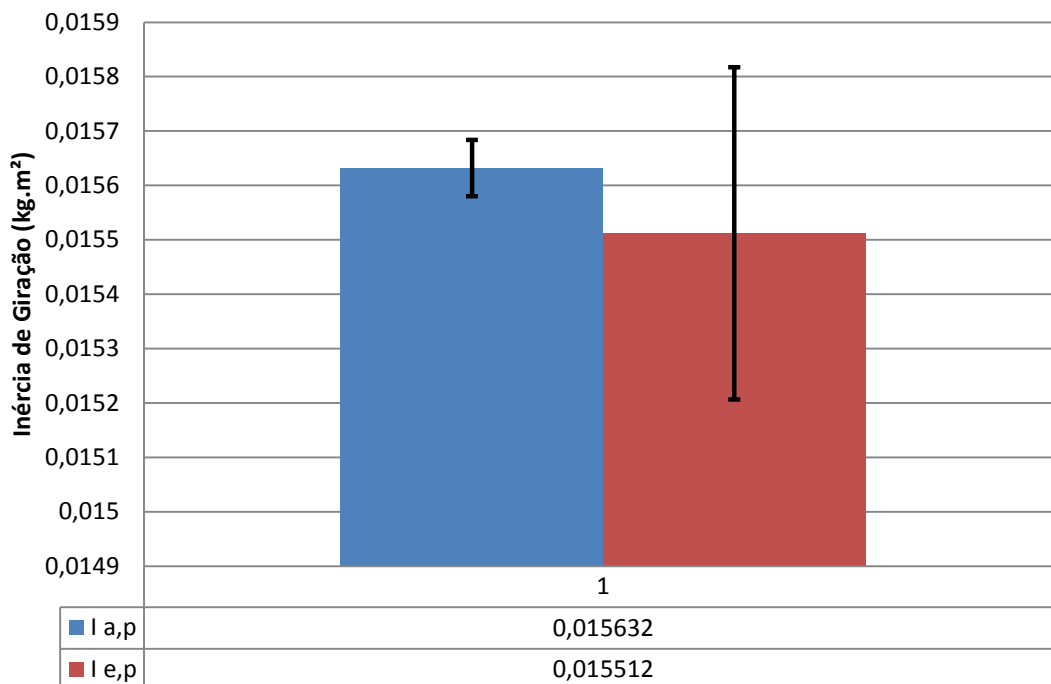


Figura 4.6 – Comparação das Inércias de giração do prisma obtidas no Pêndulo Trifilar.

4.2.3 Desalinhamento do centro de massa

Um ensaio complementar foi realizado para comprovar o trabalho de Du Bois (2007). Este artigo trata sobre uma análise de erros referentes ao efeito que desalinhamento do centro de massa do corpo de prova com o centro da plataforma provoca no resultado final do momento de inércia de giração do corpo. Este é um problema comum em corpos de geometria complexa. Conforme suas análises e cálculos, o alinhamento preciso do centro de massa do corpo a ser testado com o centro geométrico da plataforma é insignificante em comparação com a precisão de outras medições necessárias requeridas nos cálculos.

Lyons (2002) afirma brevemente uma fórmula para determinar momentos de inércia com centros de compensação de massa como alternativa para a proposição de Du Bois (2007). Se o corpo é colocado na placa com o seu centro de massa desalinhado, o valor calculado para o momento de inércia é afetado de duas maneiras:

- A inércia do sistema deve ser calculada tendo em conta a distância do centro componente da massa do corpo e da massa do centro da plataforma.
- O centro de massa (e, portanto, o centro de rotação) já não está situado no centro geométrico da plataforma. Isto irá redefinir a distribuição do peso entre os fios e também o ângulo α , através do qual cada fio é deslocado para uma dada rotação do pêndulo, θ . Este, por sua vez, redefina a equação de movimento do pêndulo.

Para investigar a extensão destes efeitos, é assumido que o centro de massa do corpo (B_{zz}) encontra-se em algum lugar na linha direta entre o centro da plataforma (P_{zz}) e uma das vértices desta. Ele é deslocado a uma distância D a partir do centro da plataforma, como mostrado na Figura 4.7:

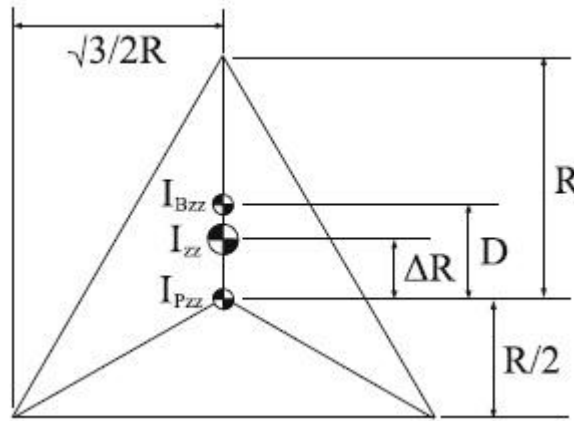


Figura 4.7 – Geometria dos centros de massa da plataforma e do corpo desalinhados. (Du Bois, 2007)

O deslocamento do centro de massa do conjunto (zz), ΔR , é então definido pela razão das massas componentes:

$$\Delta R = \frac{m_B}{m_B + m_P} D \quad (43)$$

onde m_B e m_P os valores de massa do corpo e da plataforma respectivamente.

A inércia do conjunto (I_{zz}) será dado por:

$$I_{zz} = (I_{Pzz} + m_P \Delta R^2) + (I_{Bzz} + m_B (D - \Delta R)^2) = I_{Pzz} + I_{Bzz} + \frac{m_P m_B D^2}{m_B + m_P} \quad (44)$$

Ao substituir I_{zz} na equação (26) do pêndulo trifilar, o momento de inércia do corpo com o centro de massa desalinhado com o da plataforma (I_{Bzz}) é dado:

$$I_{Bzz} = \frac{R^2 g \tau^2}{4\pi^2 L} (m_B + m_P) - I_{Pzz} - \frac{m_P m_B D^2}{m_B + m_P} \quad (45)$$

Baseado na equação (45), para o cálculo do momento de inércia do corpo desalinhado, foram feitas cinco novas experimentações com o prisma na bancada, agora, deslocando o centro de massa deste de $\Delta x = 1,5$ cm do centro da plataforma. Na Figura 4.8, é mostrado um gráfico referente aos valores finais de momento de inércia do prisma para cada Δx deslocado e barras verticais indicando a margem de erro para $\Delta x = 0$ cm.

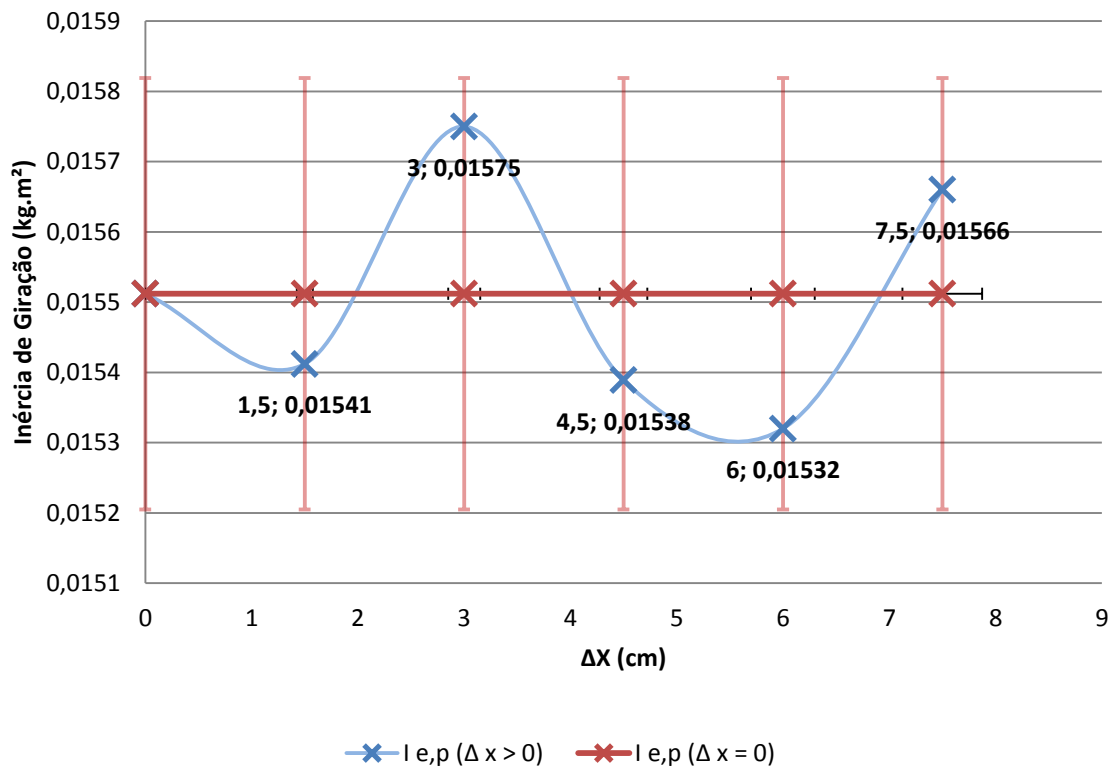


Figura 4.8 – Inércia de rotação do prisma em função do Δx deslocado.

Logo, na prática, Du Bois (2007) está correto ao afirmar que pequenos desalinhamentos do centro de massa do corpo com o centro da plataforma geram mínimas discrepâncias, visto que os valores de momento de inércia encontrados para cada Δx encontram-se dentro da margem de erro experimental da inércia de rotação calculada com os centros do corpo e plataforma rigorosamente alinhados.

4.3 Rotor Hidrocinético

Complementando o processo de validação, obtemos um modelo reduzido de um rotor de uma turbina hidrocinética de eixo horizontal com três pás do mestrando no programa de pós graduação em Ciências Mecânicas na UnB, Mendes (2013), para ser dimensionado na bancada experimental. O rotor, um corpo com uma geometria complexa, foi experimentado no pêndulo trifilar e obteve-se, experimentalmente, o momento de inércia, e foram comparado seus resultados ao modelo analítico estimado para a validação.

4.3.1 Resultados Analíticos

Devido à forma complexa do rotor, utilizou-se o *software SolidWorks* para a determinação do centro de massa do corpo e o momento de inércia para cada eixo adotado. Este *software* pode auxiliar a encontrar as características de qualquer corpo independente de sua complexidade, já que nestes, pela quantidade de irregularidades se torna muito mais difícil de encontrar tais características pois são necessários n cálculos de área utilizando integrais. Para a utilização do *software*, modelou-se primeiramente o rotor na forma tridimensional com seu centro na origem, ou seja, nas coordenadas (0,0,0) e definiram-se as propriedades de massa do corpo, obtendo a posição do centro de massa em (6.80,-1.77,97.84). Fixou-se o eixo z como referencial e obteve-se o momento de inércia do rotor, tomado do centro de massa, a partir deste eixo. A Figura 4.9 mostra a modelagem do rotor implantada no CAD e alguns parâmetros obtidos:

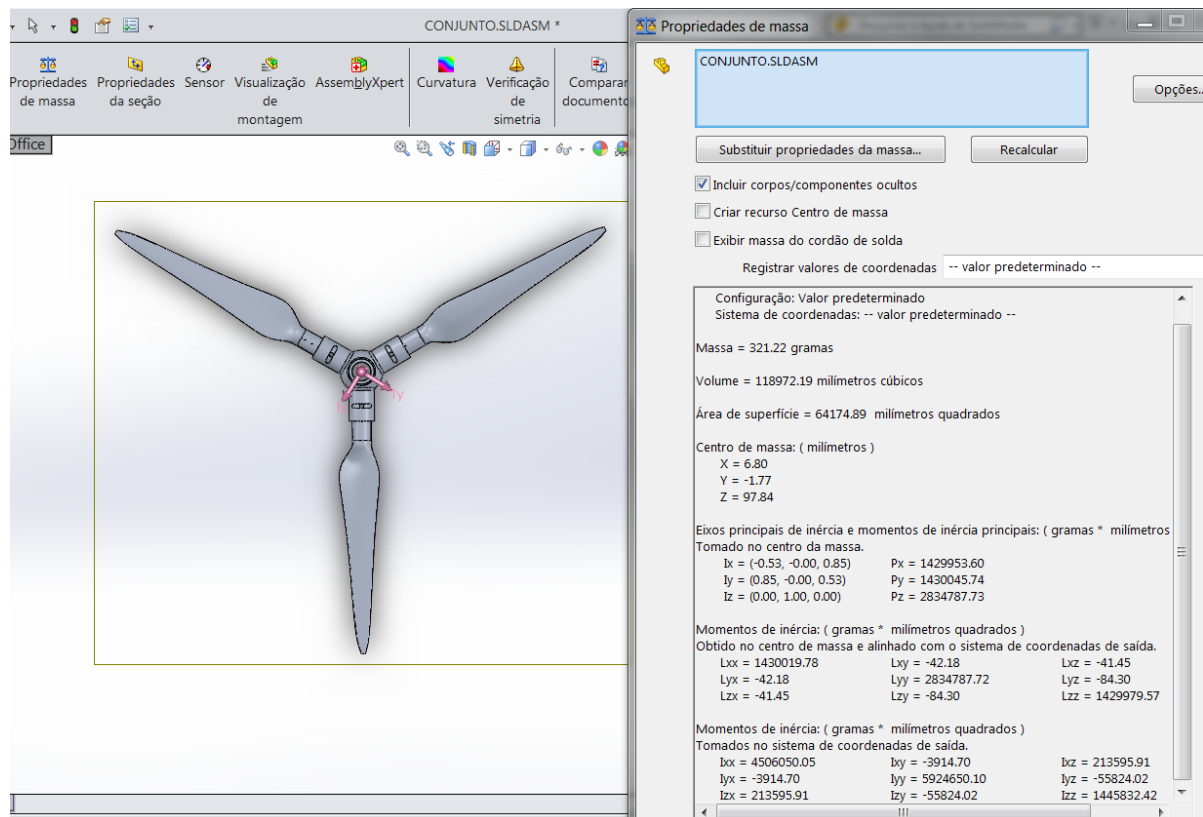


Figura 4.9 – Modelo do rotor de uma turbina hidrocínética reduzida no *software SolidWorks*.

O valor encontrado que nos interessa, P_z , foi obtido pelo CAD, mostrado na Figura 4.9. Assim, o momento de inércia analítico do rotor, $I_{a,r}$, usando o eixo z como eixo de rotação a partir do centro de massa do corpo é:

$$I_{a,r} = 2834787,73 \text{ g} \cdot \text{mm}^2 = 2,835 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (46)$$

4.3.2 Resultados Experimentais

Mas uma vez, para obtenção da inércia experimental, fizemos outro ensaio na bancada experimental, agora, utilizando como corpo de prova um corpo complexo, o rotor. Utilizou-se novamente o *Tracker* para a captura de dados da trajetória e período do pêndulo trifilar, como são mostrados nas Figuras 4.10 e 4.11:



Figura 4.10 – Ensaio do rotor hidrocínético no pêndulo torcional trifilar.

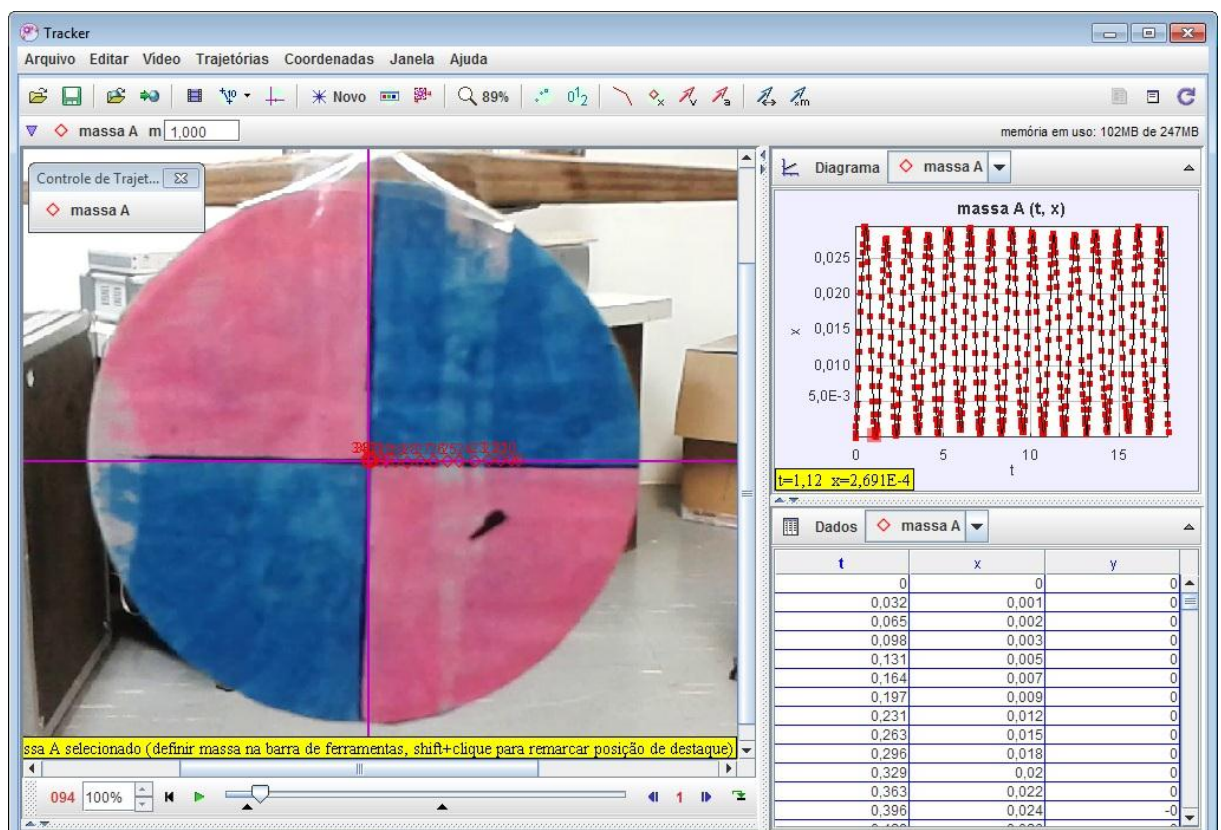


Figura 4.11 – Vista do *software Tracker* no procedimento experimental na bancada.

Novos dados experimentais foram obtidos para o rotor, representados na Figura 4.12 através de um gráfico onde o eixo horizontal representa o número da medida e o eixo vertical indica o valor medido para o período.

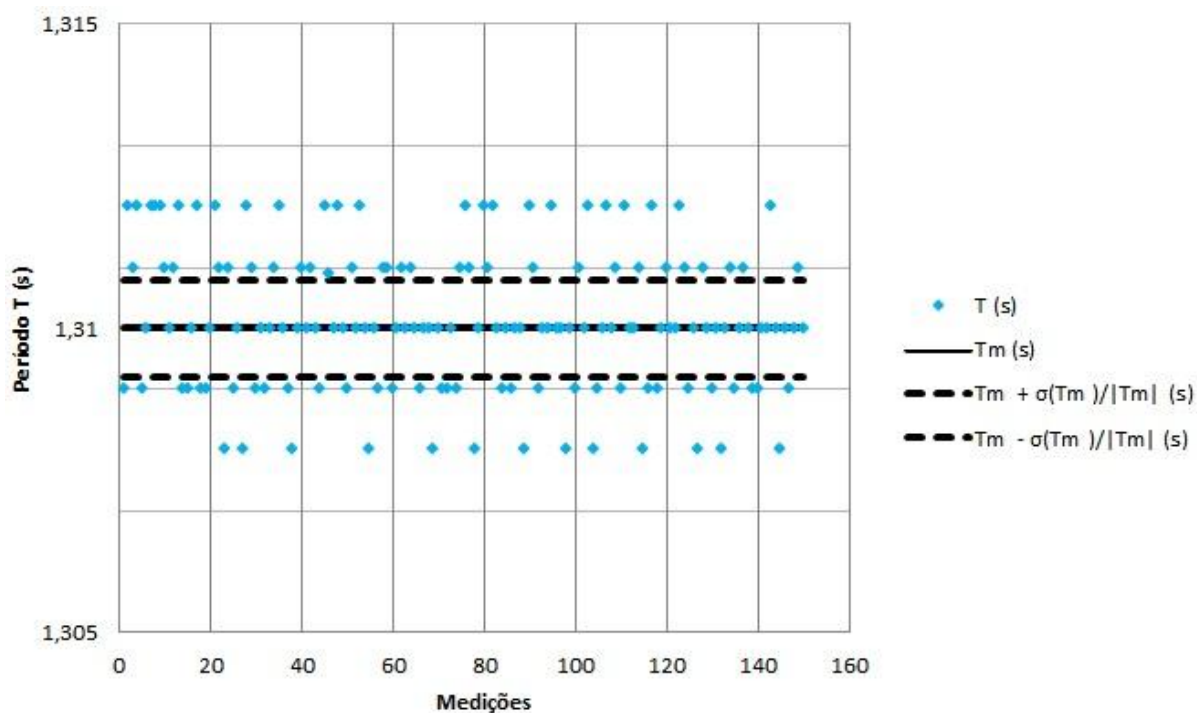


Figura 4.12 – Gráfico de medições do experimento na bancada com o rotor.

Os seguintes parâmetros estatísticos para o período do pêndulo foram obtidos ao se analisar estes dados, representados na Tabela 4.6:

Tabela 4.6 – Parâmetros do experimento.

Parâmetro	Valor (s)
T_m	1,310
σ_T	0,0021
σ_{T_m}	0,0011
$\frac{\sigma_{T_m}}{ T_m }$	0,0008

Concluídas as etapas experimentais da bancada com o rotor, foram registrados os seguintes dados do experimento na Tabela 4.7, utilizando alguns parâmetros anteriormente obtidos (Tabela 4.4).

Tabela 4.7 – Dados Experimentais.

Distância (R) = 0,295 ± 0,0005 m
Comprimento do fio (L) = 1,764 ± 0,001 m
Massa do pêndulo sem o corpo (m _s) = 0,844 ± 0,002 kg
Massa do pêndulo com o corpo (m _{conj}) = 1,290 ± 0,002 kg
Período do pêndulo sem o rotor (T _{e,s}) = 1,534 ± 0,003 s
Período do pêndulo com o rotor (T _{e,conj}) = 1,310 ± 0,003 s
g = 9,7808439 m/s ² *

Sabe-se que o momento de inércia experimental do rotor, I_{e,r}, pode ser calculado com o auxílio dos dados experimentais pela equação (26):

$$I_{e,r} = \frac{T_{e,conj}^2}{4\pi^2} \frac{m_{conj}gR^2}{L} - \frac{T_{e,s}^2}{4\pi^2} \frac{m_s gR^2}{L} = 2,783 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (47)$$

Utilizando a propagação de erros, a incerteza no momento de inércia experimental do rotor será:

$$\Delta I_{e,r} = \left[\left(\frac{2\Delta T_{e,conj}}{T_{e,conj}} + \frac{\Delta m_{conj}}{m_{conj}} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{\Delta L}{L + \Delta L} \right) + \left(\frac{2\Delta T_{e,s}}{T_{e,s}} + \frac{\Delta m_s}{m_s} + \frac{2\Delta R}{R} - \frac{\Delta L}{L + \Delta L} \right) \right] I_{e,r} \quad (48)$$

$$\Delta I_{e,r} = 0,055 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ao término desta segunda etapa experimental, foram obtidos os valores numéricos experimentais para o momento de inércia do rotor e seu erro experimental associado. Logo abaixo, na tabela 4.8, estão registrados os valores analíticos e experimentais do momento de inércia obtido do rotor, e na Figura 4.12 um gráfico mostrando os valores inerciais analíticos e experimentais obtidos do mesmo.

Tabela 4.8 – Valores numéricos analíticos e experimentais identificados para o momento de inércia do rotor.

Método Analítico	Método do Pêndulo Trifilar	Discrepância entre o Método Analítico e o Método do Pêndulo Trifilar
$I_{a,p}$ [10^{-3} kg.m ²]	$I_{e,p}$ [10^{-3} kg.m ²]	δ (%)
2,835	2,783 ± 1,98% [2,728 ; 2,840]	1,87

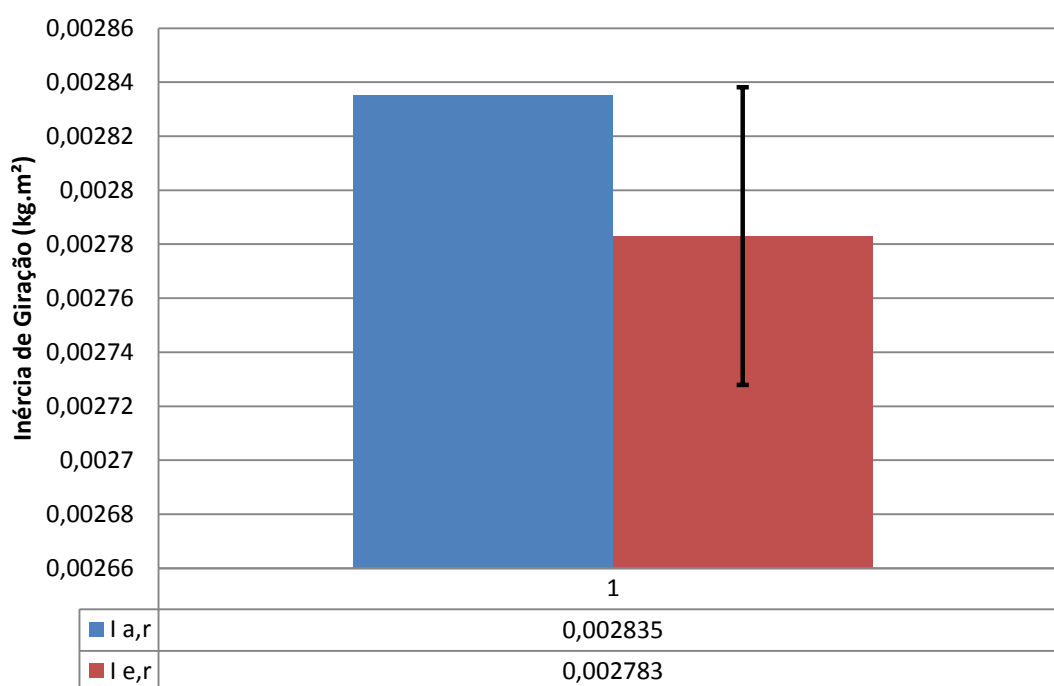


Figura 4.13 – Inércia de rotação analítica e experimental com margem de erro.

Pela Figura 4.13 verifica-se que a solução analítica da inércia de rotação do rotor hidrocínético, pelo *SolidWorks*, quase supera a margem de erro superior do valor da inércia experimental. No processo de fabricação do rotor, baseado no modelo em CAD (Figura 4.8), muita matéria foi retirada no processo de polimento deste para balancear o conjunto tri-pá. Por conta disto, nota-se um desvio nos valores inerciais para baixo no ensaio experimental.

4.4 Rotor Eólico

Avalia-se nesta terceira etapa o momento inercial de giração dos rotores de uma TEEH de pequeno porte. Dois tipos de rotores desta mesma TEEH foram ensaiados, um composto por um conjunto de três pás de fibra de carbono, e o outro, por um conjunto de três pás de fibra de vidro. Os resultados de inércia foram obtidos utilizando os mesmos procedimentos experimentais durante a validação da Bancada. A Tabela 4.9 compara os resultados obtidos por métodos oscilatórios em (Romualdo, 2013), utilizando os mesmos rotores. A Figura 4.14 mostra o ensaio do rotor no *Tracker*. Observou-se um amortecimento das oscilações do pêndulo. A resistência do ar sobre as pás do rotor são responsáveis pelo aumento da dissipação no pêndulo trifilar.

Tabela 4.9 – Comparação da inércia de giração de rotores de uma turbina eólica.

Inércia de giração do rotor eólico	PIBIC (Romualdo,2013)		Presente Trabalho
	Pêndulo Físico [kg.m ²]	Pêndulo Trifilar Torcional [kg.m ²]	Pêndulo Trifilar Torcional [kg.m ²]
Pás de fibra de carbono	0,273 ± 3,7% [0,263 ; 0,283]	0,306 ± 3,5% [0,295 ; 0,316]	0,312 ± 1,5% [0,307 ; 0,316]
Pás de fibra de vidro	0,645 ± 3,1% [0,625 ; 0,665]	0,673 ± 3,3% [0,651 ; 0,695]	0,647 ± 1,6% [0,636 ; 0,657]

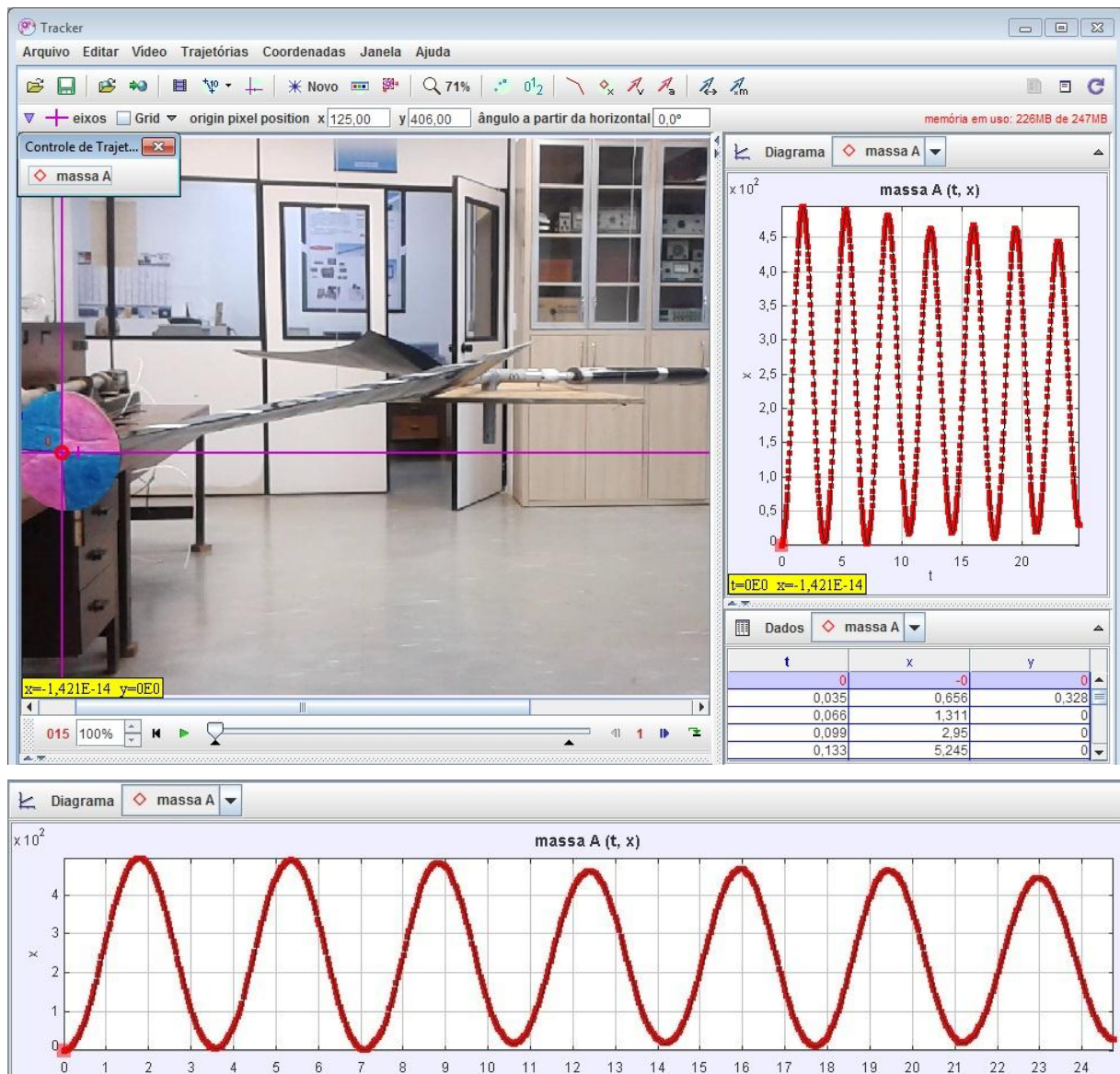


Figura 4.14 – Ensaio do rotor com pás de fibra de carbono mostrado no *software Tracker*.

Verifica-se a funcionalidade e acurácia do Método do Pêndulo trifilar e a confiabilidade da Bancada construída (Tabela 4.9) ao comparar com outras metodologias. Os resultados de inércia de rotação são semelhantes diante da margem de incerteza.

4.4.1 Amortecimento no Pêndulo Trifilar

Diante da observação de um amortecimento nas oscilações do pêndulo no ensaio dos rotores eólicos, fizemos um estudo mais detalhado para analisar tal fenômeno.

4.4.1.1 Determinação do amortecimento

Até presente momento, o modelo do Pêndulo Torcional Trifilar considerou o seguinte comportamento:

$$I\ddot{\theta} + \frac{R^2mg}{L}\theta = 0 \quad (49)$$

Este sistema dinâmico desconsidera os efeitos dissipativos para facilitar a determinação da frequência natural $\omega_n^2 = R^2mg/IL$ e a inércia de rotação I , conseqüentemente.

Contudo rotores eólicos apresentam experimentalmente um comportamento oscilatório amortecido. Uma análise mais profunda deste caso foi necessária para avaliar o impacto de amortecimento não nulo.

No caso de sistemas amortecidos viscosos, a equação de movimento do pêndulo trifilar é descrito por:

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + \frac{R^2mg}{L}\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \quad (50)$$

onde, C e ξ correspondem ao coeficiente de amortecimento e a razão de amortecimento, respectivamente. Para $0 \leq \xi < 1$, a solução da equação X toma a forma:

$$\theta(t) = \exp(-\xi\omega_n t) \left[\frac{\xi\omega_n\theta_o + \dot{\theta}_o}{\omega_d} \text{sen } \omega_d t + \theta_o \text{cos } \omega_d t \right] \quad (51)$$

onde $\theta(t=0) = \theta_o$ e $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_o$ são as condições iniciais de vibração no tempo, e a frequência amortecida

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (52)$$

é a frequência de oscilação livre deste sistema (Meirovitch,2001) (Rao, 1990).

O movimento angular $\theta(t)$ do pêndulo trifilar amortecido é descrito por uma função harmônica amortecida. A envoltória de $\theta(t)$ é descrita por uma função exponencial amortecida,

$$z[\theta(t)] = \mathcal{A} \exp(-\xi\omega_n t). \quad (53)$$

A determinação experimental da constante $-\xi\omega_n$ é possível por diversas técnicas, por exemplo, a transformada de Hilbert $\mathcal{H}[\theta(t)]$.

Já a determinação experimental da frequência natural ω_n não é uma tarefa direta. O período de oscilação do pêndulo trifilar amortecido é função da frequência amortecida ω_d , ou seja, $T_{experimental} = 2\pi/\omega_d$. Uma alternativa é efetuar a determinação da razão de amortecimento ξ através da expressão (52),

$$\xi\omega_n = \xi\omega_d/\sqrt{1-\xi^2} \quad (54)$$

ou seja,

$$\therefore \xi = \frac{(\xi\omega_n)_{lab}}{\sqrt{(\omega_d)_{lab}^2 + (\xi\omega_n)_{lab}^2}} \quad (55)$$

onde, o sub índice “lab” corresponde a valores obtidos experimentalmente.

E a determinação do período de oscilação do pêndulo trifilar amortecido é corrigido pela expressão:

$$\frac{\omega_d^2}{1-\xi^2} = \frac{R^2mg}{IL} \quad (56)$$

ou seja,

$$\therefore I_{lab} = \frac{R^2mg}{L} \cdot \frac{1 - (\xi)_{lab}^2}{(\omega_d)_{lab}^2} \quad (57)$$

4.4.1.2 Transformada de Hilbert

A transformada de Hilbert de um sinal temporal $x(t)$ é também uma função temporal $\tilde{x}(t)$, tal que,

$$z(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) \quad (58)$$

é um sinal analítico. Isto significa que a transformada de Fourier de $z(t)$ é identicamente nula para todas as frequências negativas. Além desta propriedade formal, a transformada de Hilbert possui outras propriedades interessantes, que possibilitam diversas aplicações úteis. Os trabalhos de Bendat & Piersol (1986) e Oppenheim & Schaffer (1992).

Nota-se que a definição (58) sugere um método para obter a formulação de Hilbert. Ao aplicar uma transformada de Fourier na expressão (58), tem se:

$$Z(f) = X(f) + j \tilde{X}(f) \quad (59)$$

Para a definição $Z(f < 0) = 0$ ser verdadeira, é preciso que:

$$\tilde{X}(f) = -j \operatorname{sign}(f) X(f) \quad (60)$$

onde,

$$\operatorname{sign}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases} \quad (61)$$

Ao substituir a expressão (61) na definição (60) em frequência, temos:

$$Z(f) = X(f) + j [-j \operatorname{sign}(f) X(f)] = X(f)[1 + \operatorname{sign}(f)] \quad (62)$$

logo,

$$Z(f) = \begin{cases} X(f)[1 + \operatorname{sign}(f)] & , f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases} \quad (63)$$

Isto corresponde então a definição de uma função analítica. Consequentemente, a equação (60) é a definição da transformada de Hilbert, no domínio de frequência. Para obter a definição temporal correspondente, calcula-se a transformada de Fourier inversa da expressão (60),

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (64)$$

A transformada de Hilbert representa então a convolução entre $x(t)$ e a função $1/\pi t$. De fato, temos:

$$\mathcal{H}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j \operatorname{sign}(f) \quad (65)$$

Ao analisarmos um sinal $x(t)$ do tipo cosseno amortecido (sinal vibratório típico), a transformada $\mathcal{H}[x(t)]$ funciona como um filtro em quadratura, conforme equação (60). A

partir da função analítica complexa $z(t)$ pode-se definir *amplitude instantânea*, *frequência instantânea* e *fase instantânea* do sinal $z(t)$:

$$z(t) = x(t) + j \tilde{x}(t) \rightarrow z(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (66)$$

A *amplitude instantânea* $A(t)$ representa o envelope do sinal $z(t)$:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad (67)$$

E a *frequência instantânea* $f(t)$ e a *fase instantânea* $\phi(t)$ são calculadas por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\phi(t)], \quad \text{sendo } \phi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right) \quad (68)$$

4.4.1.3 Resultados Práticos

São realizados dois exemplos práticos para avaliar a determinação experimental do amortecimento do sistema corpo ensaiado + pêndulo torcional trifilar. O primeiro exemplo considera o prisma como corpo ensaiado. O segundo exemplo considera o rotor tri-pá da turbina eólica. O primeiro exemplo apresenta amortecimento quase nulo. Já o segundo exemplo possui um amortecimento considerável, devido ao atrito aerodinâmico.

a) Exemplo do Prisma (amortecimento quase nulo)

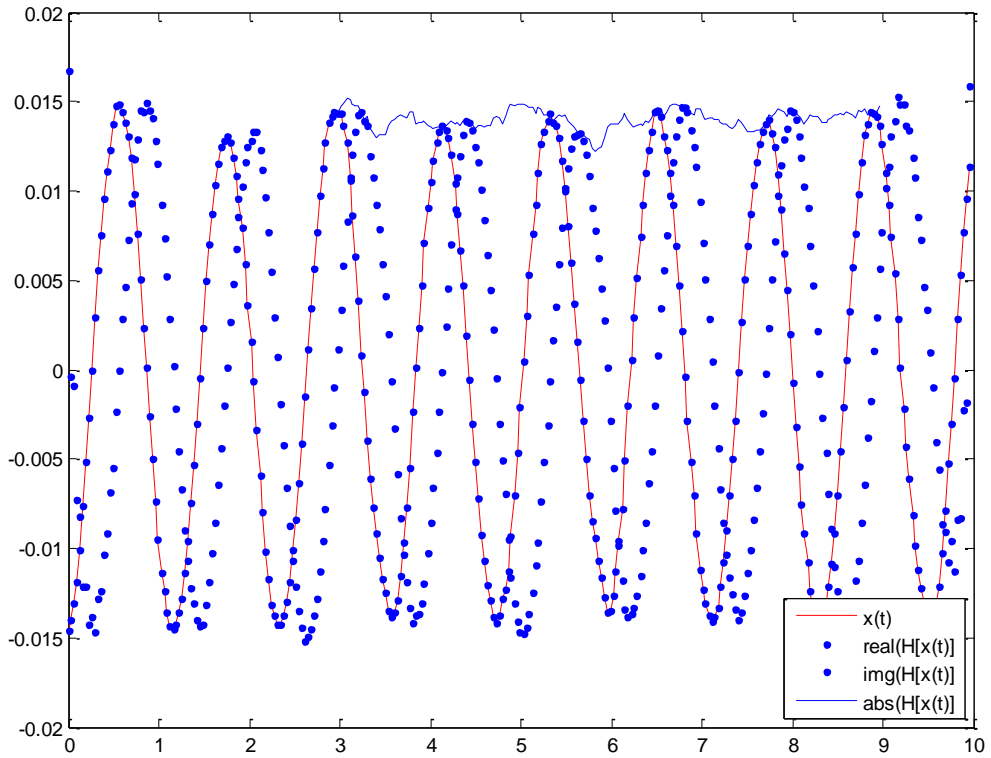


Figura 4.15 – Evolução temporal do ângulo $\theta(t)$ do pêndulo trifilar comparado aos componentes real/imaginário e módulo da transformada de Hilbert $\mathcal{H}[\theta(t)]$.

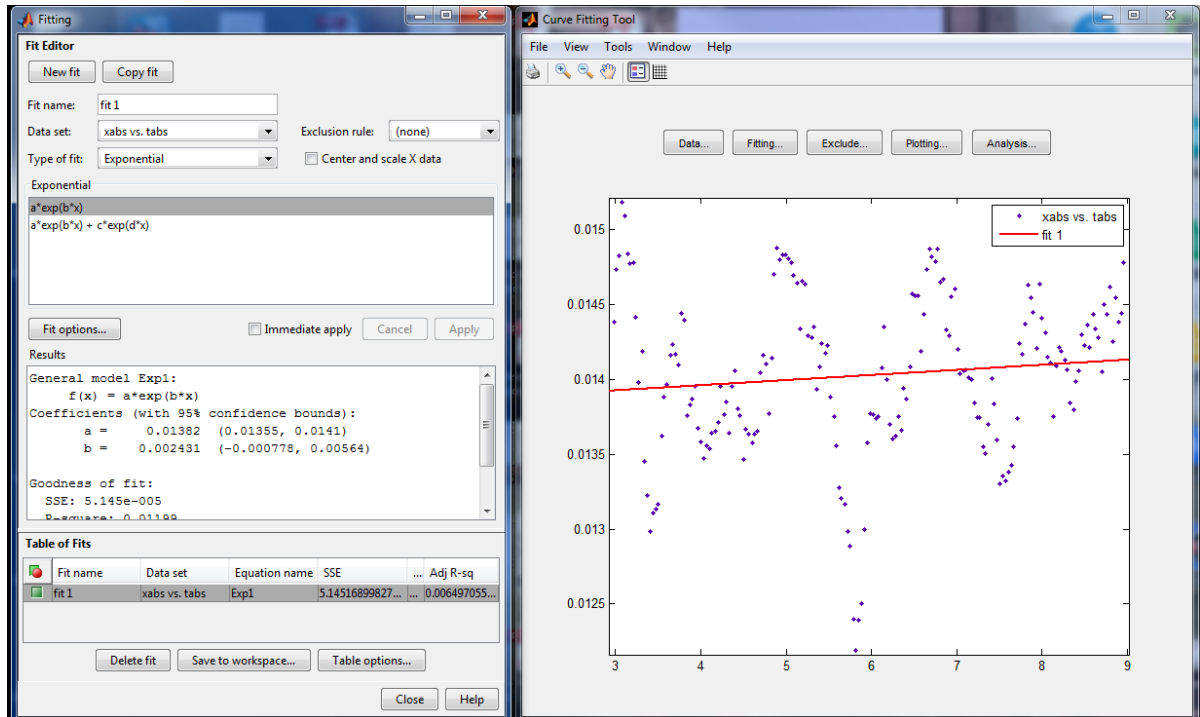


Figura 4.16 – Ajuste por função exponencial da envoltória amortecida $\mathcal{A}(t)$.

$$\overline{(\xi\omega_n)_{lab}} = 0,24\% \text{ onde } (\xi\omega_n)_{lab}^{95\%} = [-0.08\%; -0.56\%]$$

(intervalo com 95% de confiança)

O sistema prisma + pêndulo trifilar apresentou uma baixíssima precisão por possuir um amortecimento quase nulo.

b) Exemplo do Rotor Eólico (amortecimento não nulo)

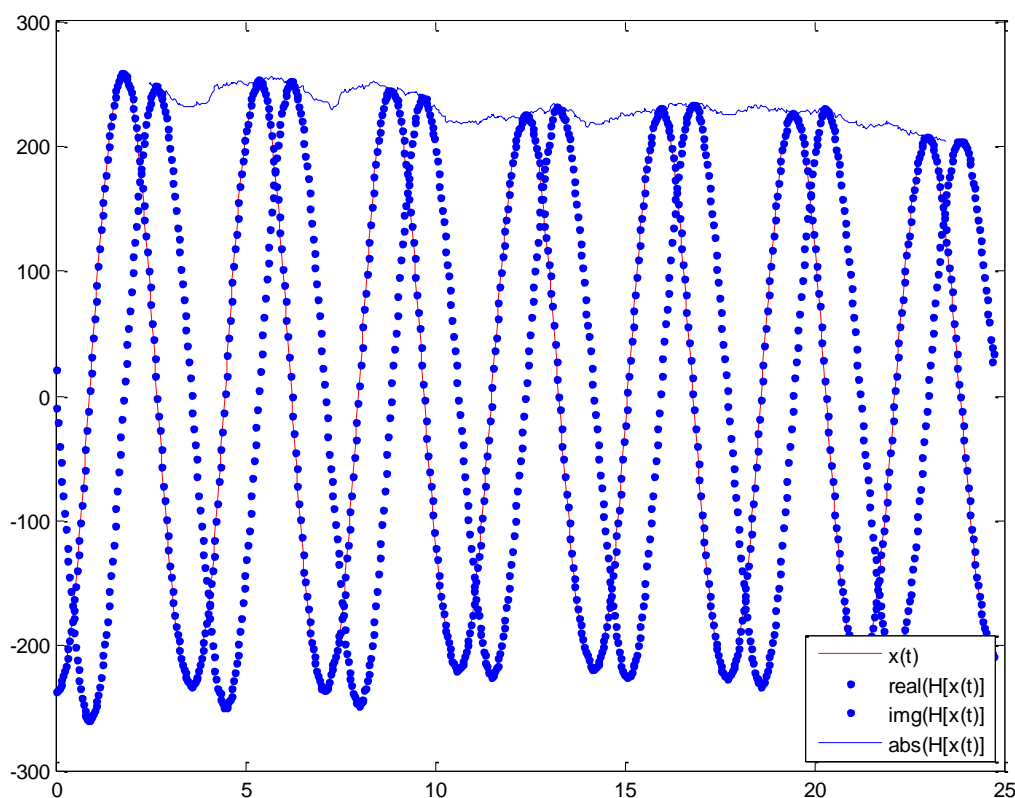


Figura 4.17 – Evolução temporal do ângulo $\theta(t)$ do pêndulo trifilar comparado aos componentes real/imaginário e módulo da transformada de Hilbert $\mathcal{H}[\theta(t)]$.

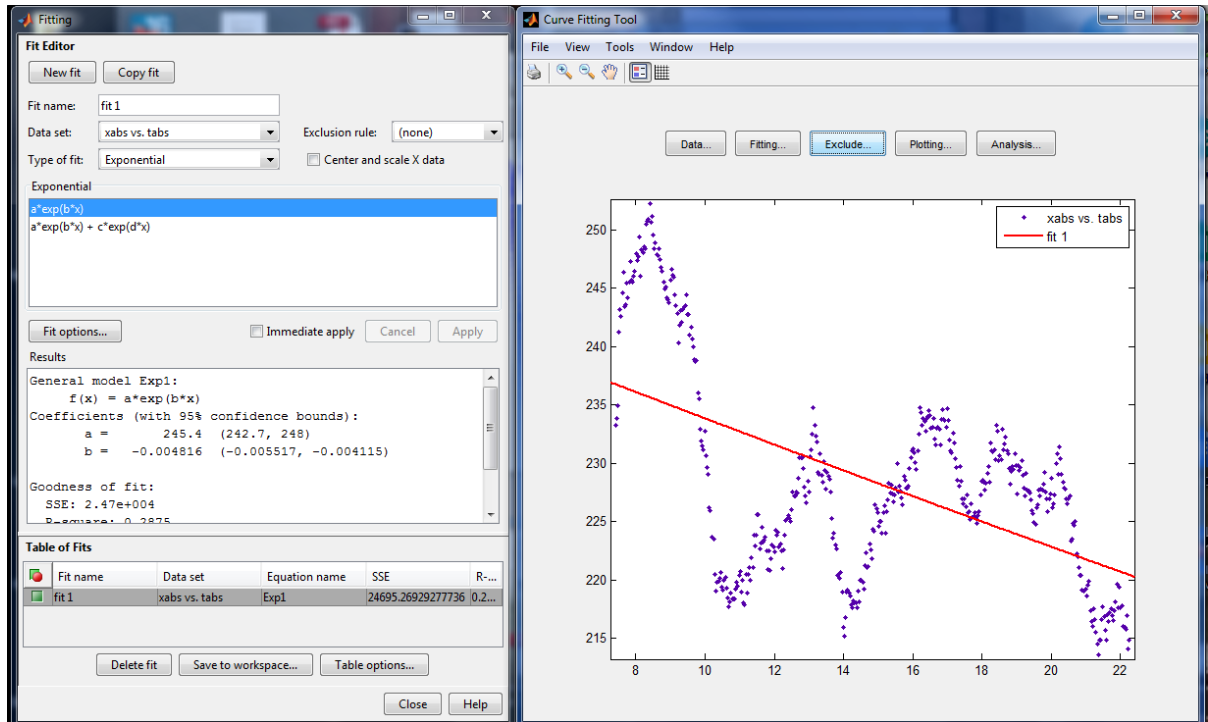


Figura 4.18 – Ajuste por função exponencial da envoltória amortecida $\mathcal{A}(t)$.

$\overline{(\xi\omega_n)_{lab}} = 0.48\%$ onde $(\xi\omega_n)_{lab}^{95\%} = [-0.55\%; -0.41\%]$
(intervalo com 95% de confiança).

$$\overline{(\xi\omega_n)_{lab}} = 0.48 \pm 0.07\%$$

No sistema rotor eólico + pêndulo trifilar a precisão melhorou por possuir um amortecimento não-nulo.

A razão de amortecimento ξ_{lab} e a frequência natural do sistema $\omega_{n,lab}$, definidas pela equação (55) e (54), respectivamente, são:

$$\xi_{lab} = \frac{(0.004816)_{lab}}{\sqrt{(1.7779245)_{lab}^2 + (0.004816)_{lab}^2}} = 0.27088\% \quad (69)$$

e

$$\omega_{n,lab} = (\xi\omega_n)/\xi_{lab} = 1.7779311 \text{ rad/s} \quad (70)$$

Através da equação (57) obteve-se o valor da inércia de giração do rotor eólico acrescida do valor amortecido. A equação (57) aplicada ao sistema em (26), temos:

$$I_{carb,lab} = \frac{R^2 m_{conj} g}{L} \cdot \frac{1 - (\xi)_{lab}^2}{(\omega_d)_{lab}^2} - \frac{T_{e,s}^2}{4\pi^2} \frac{m_s g R^2}{L} = 0,3124674 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (71)$$

onde, o sub índice “*carb*” corresponde ao rotor com pás de fibra de carbono.

Na Tabela 4.10 mostra os valores de inércia de rotação amortecida do rotor eólico comparada ao de inércia desconsiderado o atrito aerodinâmico das pás.

Tabela 4.10 – Comparação da inércia de rotação amortecida e não-amortecida de rotores de uma turbina eólica.

Inércia de rotação do rotor eólico	Amortecimento Nulo	Amortecimento Não-Nulo	Acréscimo de Inércia de Rotação
	$I_{e,r}$ [kg.m ²]	I_{lab} [kg.m ²]	σ [%]
Pás de fibra de carbono	$0,3124673 \pm 1,5\%$	$0,3124673 \pm 1,5\%$	$3,2 \cdot 10^{-5}$

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

O presente trabalho teve como finalidade construir e validar uma Bancada experimental para a obtenção do momento de inércia de giração de corpos rígidos. Alguns métodos experimentais foram estudados e analisados, e após, este levantamento, avaliou-se que o Método do Pêndulo Trifilar Torcional era o mais indicado e eficaz para este objetivo.

A Bancada experimental do pêndulo trifilar foi então construída e permitiu obter o momento de inércia dos corpos de geometria simples e complexa. A validação da bancada foi satisfatória. A discrepância entre este método experimental comparado ao analítico foi mínima considerando a margem de erro experimental.

Através da análise dos resultados obtidos, concluímos que o método do pêndulo trifilar, ainda que um método experimental, apresenta erros relativamente mínimos (0-2%) comparados a outras metodologias. Através dos resultados experimentais e propagação dos erros, o Pêndulo Trifilar torcional mostra-se uma maneira simples, viável e precisa para a determinação do momento de inércia de giração.

O estudo da propagação de erros dos ensaios foi feito considerando as seguintes aproximações: fio inextensível, centros de massa do corpo e da plataforma alinhados, e ausência de amortecimento do ar.

Nos ensaios com o prisma não foi possível identificar o amortecimento do pêndulo trifilar e seu acréscimo no valor da inércia de giração do corpo. O sistema apresentou uma baixíssima precisão por possuir um amortecimento quase nulo. Já no ensaio do rotor eólico, o amortecimento do pêndulo foi perceptível. Utilizou-se a transformada de Hilbert para obter a razão de amortecimento do pêndulo trifilar. A Tabela 4.10 mostrou que o amortecimento gerou um aumento ($\sigma = 3,2 \times 10^{-5} \%$) no valor final da inércia de giração, considerado ínfimo diante da margem do erro propagado.

Comprovou-se, na prática, o que Du Bois (2007) afirmou através de seu estudo que pequenos desalinhamentos do centro de massa do corpo com o centro da plataforma geram mínimas discrepâncias no resultado final da inércia de giração do corpo (Figura 4.8). Portanto, foi mantida esta aproximação.

Um fator que foi observado é que quando foram medidos o tamanho dos três fios de suporte do pêndulo, atribuiu-se o mesmo comprimento dos fios sem o corpo na bancada e com o corpo. Quando o corpo é colocado na plataforma do pêndulo, além da influência da força de atração gravitacional puxando o pêndulo para baixo, causando um intervalo de tempo menor do período de oscilação, os fios ficam totalmente esticados havendo uma outra força restauradora devido à

propriedade elástica do fio. Portanto, como na prática o fio utilizado não era inextensível como o fio ideal considerado no modelo, na hora de determinar os comprimento dos fios, foi considerado o erro instrumental da trena ($\pm 0,0005$ m), mas devido principalmente à elasticidade do fio utilizado, as medições sucessivas indicaram uma imprecisão de $\pm 0,001$ m condizente com as condições reais do experimento .

Outro ponto que foi também observado que influencia o resultado obtido através deste método de vídeo análise é a distância que a câmera está com relação à linha horizontal percorrida pelo pêndulo no seu movimento. Se a câmera estiver perto demais, a relação entre comprimento e número de pixels não é constante para toda a imagem devido a efeitos de perspectiva. E se a câmera se afasta desta linha, a posição do pêndulo se torna menos nítida já que a imagem deste se torna menor.

A instrumentação necessária para se obter o período do pêndulo trifilar foi uma câmera digital e o programa Tracker. Para os experimentos realizados neste trabalho – pêndulo trifilar torcional – foi necessária uma câmera com resolução de filmagem de 640 x 480 pixels com uma taxa de captura de 30 quadros por segundo (fps), ou seja, cada imagem registra o deslocamento do pêndulo durante um intervalo de 0,0333 segundos. Provada a influência significativa do erro experimental do período no estudo da propagação de erros na equação (35), o *Tracker* nos auxiliou bem na diminuição desta propagação de erro do período, podendo ainda ser mais eficiente dependendo da resolução da câmera usada, como algumas câmeras especiais, as chamadas “super câmeras”, que possuem uma taxa de captação chegando a produzir filmes com 10.000 fps, e uma altíssima nitidez na filmagem.

Numa etapa seguinte, a perspectiva é que esta Bancada experimental possa realizar experimentos utilizando corpos ainda mais complexos ou irregulares. Na literatura mostra que o método experimental utilizado é geralmente aplicado a grandes cargas (motores, hélices, etc.), principalmente no contexto industrial. Para tanto, a Bancada necessita ser aprimorada, principalmente, na estrutura dos fios de sustentação e no tamanho da estrutura da plataforma do pêndulo, para atender a grandes cargas, levando em conta o aprendizado e as avaliações feitas no presente trabalho.

6 Referências Bibliográficas

- Agência Nacional de Energia Elétrica – ANEEL (2008). *Atlas de Energia Elétrica do Brasil*. 3ª edição.
- Antunes, J. (1998). *Méthodes Déterministes*. Paris: Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingenieur.
- Appio, A.J. (2010). *Energia Eólica – Evolução e perspectivas no Brasil*. Ed. Scipione.
- Associação Brasileira de Energia Eólica (ABEEólica). Nosso Setor: Dados e materiais técnicos. Disponível em: <http://www.portalabeeolica.org.br/index.php/nosso-setor.html>. Acesso em 10/10/2014.
- Bendat, J., & Piersol, A. (1986). *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. New York: John Wiley and Sons.
- Brown, D. & Cox, A. J. (2009). *Innovative uses of video analysis*. *The Physics Teacher*, v. 47, p. 145-150.
- Du Bois, J.L. & Adhikari, S. (2007). *Error Analysis in Trifilar Inertia Measurements*. Published on *Society for Experimental Mechanics* 49,533-540.
- Falcão, A. F. (2006). *Energias Renováveis*. Ed. Aeist.
- Felippes, R. A. (2012). *Análise e desenvolvimento de aerogeradores com pás compósitas*. UnB: Projeto final de graduação.
- Genta, G. & Delprete, C. (1994). *Some considerations on the experimental determination of moments of inertia*. *Meccanica*, pp. 29-125.
- Inman, D. J. (2007). *Engineering vibration*. Pearson Education, (3rd edition).
- Lyons, D. (2002). *Obtaining optimal results with trifilar pendulums for moment of inertia measurement*. In: 61st annual conference, Society of Allied Weight Engineers, paper n°3237, Virginia.
- Meirovitch, L. (2001). *Fundamentals of Vibration*. New York: McGraw-Hill Co.
- Mendes, R. (2013). *Calibração de microdinamômetros elétricos*. UnB: Projeto de graduação final.
- Oliveira, L. P. (2011). *Divulgando e ensinando análise de vídeo em sala de aula*. Experimentos de mecânica com o software Tracker.
- Oliveira, P. (2014). *Cálculo do momento de inércia pelo método do pêndulo bifilar*. Relatório de Iniciação Científica. PROIC – UnB/CNPq.
- Oppenheim, A., & Schafer, R. (1992). *Discrete-Time Statistical Signal Processing*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall International Editions.

Rao, S. (1990). *Mechanical Vibration* (éd. 2nd edition). New York: Addison-wesley Publishing Company.

Romualdo, S. (2013). *Determinação da inércia de rotação em turbinas hidrocínéticas*. Relatório de Iniciação Científica. PROIC – UnB/CNPq.

Rubin, S. (1994). *Determination of center of gravity and Moments of inertia*. Ed. Heinemann.

Rueda, S. A. (2012). *Modelagem do acoplamento rotor e gerador elétrico em turbinas eólicas*. UFPA: Tese de mestrado.

Santoro, A. (2008). *Estimativas e erros em experimentos de física*. Ed. UERJ, p.132, 2ª edição.

Souza, G. & Bermudez, T. (2010). *Estudo Aerodinâmico e de funcionamento de uma turbina eólica no DF*. UnB: Projeto de graduação.

Schwartz, A. B. (1957). *Measurement of the moment of inertia of Missile-type bodies: a modified Bifilar Torsion Pendulum formula*. *Aircr Eng*, pp: 271–274.

Svercauski, B., PhD (2012). *Kinetics in individuals with unilateral transtibial amputations Using Running Specific Prostheses*. University of Maryland, College Park, USA.

Swank, J. A. (2002). *Moment of Inertia Measurement using a five-wire torsion pendulum and optical sensor*. Stanford University, California 2Squid Labs Emeryville, CA.

