R.R.FRAGELLI T.S.EVANGELISTA V.C.RISPOLI

PLAY
Cálculo

Intensivo e Direto

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

PLAY
Cálculo

COORDENADORES

Ricardo Ramos Fragelli

Vinícius de Carvalho Rispoli

Tatiane da Silva Evangelista

DEMAIS AUTORES

Arthur Jahn Sturzbecher

Ina Tayane Barbosa Tavares

Bruno Nunes de Freitas

Jefferson Andrade da Rocha

Daniela Neves de Lima

Kalil Martins Mota

Eduardo Jonathan Ramos e Silva Sampaio

MÓDULO 1

FRAÇÕES

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$\frac{25}{4} - \frac{3}{3} + 2 \ = ?$$

$$\frac{(12-3)}{(10-8)} \cdot \frac{(8+4)}{(5-3)} \ = ?$$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 1 (ESTUDO DAS FRAÇÕES)**

Teoria e Exemplos

1. FRAÇÕES

Denomina-se por fração a razão entre dois números inteiros a e b, tal que $b \neq 0$, cuja notação é dada por:

$$\frac{a}{b}$$

em que o número a é chamado de numerador e b o denominador da fração.

Exemplo 1:

$$\frac{6}{2} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{-2}{7}$$

2. REGRAS DE SINAL PARA FRAÇÕES

A) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Exemplo 1:

$$\frac{-7}{3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

B) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Exemplo 2:

$$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

3. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

A) DENOMINADORES IGUAIS

Para trabalhar com frações cujo denominadores são iguais, basta somar ou subtrair o numerador, mantendo o mesmo denominador. Veja:

Exemplo1:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = \boxed{3}$$

Exemplo 2:

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7-2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Exemplo 3:

$$\frac{2}{5} - \frac{7}{5} - \frac{9}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2-7-9+4}{5} = \frac{-10}{5} = \boxed{-2}$$

B) DENOMINADORES DIFERENTES

Caso os denominadores não sejam iguais, basta encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e com isso transformar frações com denominadores diferentes para aquelas com um denominador comum e, assim, efetuar a operação desejada (soma ou subtração).

Dados dois números inteiros a e b, não nulos, o mínimo múltiplo comum entre eles, $mmc(a,b)$, é o menor número inteiro c com a característica de ser múltiplo de a e b ao mesmo tempo.

Exemplo 1:

Múltiplos de 4: 0, 4, $\boxed{8}$, 12, 16, … Múltiplos de 8: 0, $\boxed{8}$, 16, 24, 32, …

Ou seja, para os números 4 e 8, o MMC entre eles é o $mmc(4,8) = 8$.

Exemplo 2:

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3}$$

Primeiramente, encontrar o MMC entre 3 e 6:

Múltiplos de 3: 0, 3, $\boxed{6}$, 9, 12, … Múltiplos de 6: 0, $\boxed{6}$, 12, 18, …

Assim, tem-se que $mmc(3,6) = 6$.

Depois, transformar as frações com o mesmo MMC. Ou seja, o denominador de ambas deverá ser igual a 6:

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{7}{6} + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{7+10}{6} = \boxed{\frac{17}{6}}$$

Exemplo 3:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2} + \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{12} = \frac{9+30+6}{12} = \boxed{\frac{45}{12}}$$

Observe que 12/4 é igual a 3, 12/2 é igual a 6 e 12/6 é igual a 2.

Exemplo 4:

$$-\frac{3}{2}-\frac{5}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6\cdot(-3)+4\cdot(-5)+3\cdot 1}{12}=\boxed{-\frac{35}{12}}$$

4. PRODUTO E QUOCIENTE DE FRAÇÕES

Para efetuar o produto entre frações, basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador. A simplificação faz-se necessária para um melhor resultado.

Exemplo 1:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{3}=\frac{5\,.\,12}{6\,.\,3}=\frac{60}{18}=\frac{60:6}{18:6}=\boxed{\frac{10}{3}}$$

Nesse caso, poderíamos simplificar antes mesmo de realizar a operação, veja:

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{3}=\frac{5}{\cancel{6}}.\frac{\cancel{12}}{3}=\frac{5\,.\,2}{3}=\boxed{\frac{10}{3}}$$

Para efetuar o quociente entre frações, basta multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, veja:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Exemplo 2:

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{11}{14}}=\frac{4}{7}:\frac{11}{14}=\frac{4}{7}.\frac{14}{11}=\frac{4}{\cancel{7}}.\frac{\cancel{14}}{11}=\frac{4\,.\,2}{11}=\boxed{\frac{8}{11}}$$

Exercícios

E1. Faça as operações seguintes:

a) $\frac{1}{6}+\frac{4}{6}$

b) $\frac{8}{3}-\frac{5}{3}$

c) $\frac{-4}{8}+\frac{-5}{8}$

d) $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}-\frac{1}{8}$

e) $-\frac{3}{2}-\frac{18}{2}-\frac{4}{2}$

f) $\frac{12}{30}-\frac{10}{(2\cdot 15)}$

g) $-\frac{1}{7}-\frac{5}{3}$

h) $\frac{12}{5}-\frac{10}{3}$

i) $\frac{2}{8}-\frac{5}{1}$

j) $\frac{5}{2}+\frac{3}{125}-\frac{5}{5}$

k) $\frac{25}{4}-\frac{3}{3}+2$

l) $\frac{2}{6}+\frac{16}{2}-3$

E2. Faça as operações seguintes:

a) $$\frac{8}{25}\cdot\frac{5}{1}$$

b) $$\frac{13}{(3+5)}\cdot\frac{6}{8}$$

c) $$\frac{15}{10}\cdot\frac{10}{100}$$

d) $$\frac{(12-3)}{(10-8)}\cdot\frac{(8+4)}{(5-3)}$$

e) $$\frac{3}{4}\cdot\frac{(12+1)}{(12-1)}$$

f) $$\left(\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{12-2}\right)$$

g) $$\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{(2-1)}.3$$

h) $$\frac{(-8)}{(-1)}\cdot\frac{100}{10}$$

i) $$-\left(\frac{22}{12}.\frac{6}{1}\right)$$

j) $$\frac{\frac{8}{6}}{\frac{8}{1}}$$

Gabarito

E1.

a) $\frac{5}{6}$

b) 1

c) $\frac{-9}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $-\frac{25}{2}$

f) $\frac{1}{15}$

g) $-\frac{38}{21}$

h) $-\frac{14}{15}$

i) $-\frac{19}{4}$

j) $\frac{381}{250}$

k) $\frac{29}{4}$

l) $\frac{16}{3}$

E2.

a) $\frac{8}{5}$

b) $\frac{39}{32}$

c) $\frac{3}{20}$

d) 27

e) $\frac{39}{44}$

f) $\frac{1}{25}$

g) $\frac{21}{4}$

h) 80

i) -11

j) $\frac{1}{6}$

MÓDULO 2

POTENCIAÇÃO

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$\frac{9^8}{9^5} \cdot \frac{9^7}{9^5} = ?$$

$$7^5 \cdot \frac{7}{7^5} \cdot (7^8)^4 = ?$$

$$[(x \cdot y^5)^4]^2 \cdot (y \cdot x^7)^5 \cdot \frac{x^2}{x^5} = ?$$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 2 (POTENCIAÇÃO)**

Teoria e Exemplos

1. POTENCIAÇÃO

Dado $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, a potenciação a^n é calculada como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a \cdot a \cdot a}_{n\ vezes},$$

em que o número a é chamado de base e n é o expoente.

Exemplo:

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

2. REGRAS E PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

A) $a^1 = a$

Exemplo 1:

$$7^1 = 7$$

B) $a^0 = 1$, se $a \neq 0$

Exemplo 2:

$$5^0 = 1$$

C) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplo 3:

$$3^5 \cdot 3^7 = 3^{5+7} = 3^{12}$$

D) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, se $a \neq 0$

Exemplo 4:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

E) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, se $a \neq 0$

Exemplo 5:

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$$

Exemplo 6:

$$\frac{5^3}{5^5} = 5^{3-5} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

F) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplo 7:

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

G) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplo 8:

$$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$$

H) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemplo 9:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

Exercícios

E1. Simplifique e dê a resposta em forma de potência:

a) $2^4 \cdot 2^8 \cdot 2^1$

b) $\frac{4^4}{4^2}$

c) $5^0 \cdot 5^2 \cdot 5^8 \cdot 5$

d) $\frac{2^{\frac{7}{2}}}{2^5} \cdot \frac{16}{2^2}$

e) $\frac{9^3}{3^2} \cdot \frac{27^3}{9^5}$

f) $5 \cdot 25 \cdot 5^{10}$

g) $\frac{9^8}{9^5} \cdot \frac{9^7}{9^5}$

h) $5 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 625$

i) $8 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 32$

j) $3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 9$

k) $\frac{8^2}{8^5} \cdot \frac{64^2}{64^3}$

l) $y^5 \cdot y^{-7} \cdot y^3 \cdot y^9$

m) $\frac{1}{x} \cdot \frac{x^8}{x} \cdot \frac{x}{x^5}$

n) $\frac{7^{-3}}{7^3} \cdot \frac{1^{209}}{7^{-9}}$

o) $\frac{7}{7^3} \cdot \frac{7^7}{7^2 \cdot 7^6} \cdot 7^{-3}$

E2. Simplifique e dê a resposta em forma de potência:

a) $\dfrac{6^9 \cdot 6^8 \cdot 36^2}{6^{12}} \cdot \dfrac{6^7}{6^5 \cdot 36^6} \cdot 6$

b) $\dfrac{z}{z^k} \cdot \dfrac{z^k \cdot z}{z^5 \cdot z} \cdot \dfrac{1}{z}$

c) $\dfrac{23^{-5}}{23} \cdot \dfrac{23 \cdot 23^{15}}{(23^2)^6}$

d) $4^{12} \cdot \dfrac{1}{8} \cdot 2^{-7}$

e) $y^x \cdot y \cdot (y^k)^5$

f) $a^{2n} \cdot a^3 \cdot (a^n)^5$

g) $7^5 \cdot \dfrac{7}{7^5} \cdot (7^8)^4$

h) $y^2 \cdot x^5 \cdot y^3 \cdot \dfrac{y^7}{y^5} \cdot \dfrac{x^8}{x^9}$

i) $[(x \cdot y^5)^4]^2 \cdot (y \cdot x^7)^5 \cdot \dfrac{x^2}{x^5}$

j) $\dfrac{5}{5^{\frac{3}{5}}} \cdot \dfrac{5^{\frac{3}{5}}}{5^2}$

k) $\dfrac{\frac{x^2 \cdot (x^3)^4}{x} \cdot \frac{x^5}{x \cdot x^8}}{x^5} \cdot \dfrac{1}{x^{-8}}$

l) $9^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{8}}$

m) $\dfrac{8^{\frac{3}{7}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

n) $16^{\frac{3}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{15}}$

o) $\dfrac{2^4 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{6}} \cdot 8^3}$

Gabarito

E1.

a) 2^{13} b) 2^4 c) 5^{11}

d) $2^{\frac{1}{2}}$ e) 3^3 f) 5^{13}

g) 9^5 h) 5^8 i) 2^{14}

j) 3^9 k) 2^{-15} l) y^{10}

m) x^2 n) 7^3 o) 7^{-6}

E2.

a) 1 b) z^{-5} c) 23^{-2}

d) 2^{14} e) y^{5k+x+1} f) a^{7n+3}

g) 7^{33} h) x^4y^7 i) $x^{40} \cdot y^{45}$

j) 5^{-1} k) x^{-4} l) $3^{\frac{17}{24}}$

m) $2^{\frac{20}{21}}$ n) $2^{\frac{57}{15}}$ o) $2^{\frac{-14}{3}}$

MÓDULO 3

RADICIAÇÃO

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{15}} = ?$$

$$\sqrt{\left(\frac{34}{2}\cdot\frac{4}{17}\right)^{\frac{4}{3}}} = ?$$

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})} = ?$$

$$\frac{3}{2^{-\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}}+7)} + \frac{4}{(2^{\frac{1}{2}})^5 - 4} = ?$$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 3 (RADICIAÇÃO)**

Teoria e Exemplos

1. RADICIAÇÃO

A radiciação é um caso particular da exponenciação com expoente fracionário, veja:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, onde\ a > 0.$$

Exemplo 1:

$$2^{1/2} = \sqrt{2^1} = \boxed{\sqrt{2}}$$

Exemplo 2:

$$7^{3/5} = \boxed{\sqrt[5]{7^3}}$$

2. REGRAS E PROPRIEDADES DA RADICIAÇÃO

A) $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}, a > 0$

Exemplo 1:

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \boxed{\sqrt{2^3}}$$

Exemplo 2:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{73}}{\sqrt[3]{49}}\right)^3 = \frac{\left(\sqrt[4]{73}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{49}\right)^3} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{(73)^3}}{49}}$$

B) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Exemplo 3:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \boxed{\sqrt{6}}$$

C) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Exemplo 1:

$$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{60}{30}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

2. RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

A racionalização consiste em se obter uma fração equivalente com denominador racional, para substituir aquela com denominador irracional.

A) QUANDO O DENOMINADOR É UMA RAIZ QUADRADA

No caso de um radical $\sqrt{a}$ no denominador, fazemos a multiplicação por $\sqrt{a}/\sqrt{a}$.

Exemplo 1:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

B) QUANDO O DENOMINADOR É UMA RAIZ NÃO QUADRADA

No caso de um radical $\sqrt[m]{a}$ no denominador, fazemos a multiplicação por $\sqrt[m]{a^{m-1}}/\sqrt[m]{a^{m-1}}$.

Exemplo 2:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \boxed{\frac{2\sqrt[3]{5}}{5}}$$

C) QUANDO O DENOMINADOR É UMA SOMA OU DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

No caso de uma expressão $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ no denominador, fazemos a multiplicação por $\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)/\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)$.

Exemplo 3:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}}$$

Exercícios

E1. Faça as operações a seguir:

a) $\sqrt[3]{8} + \sqrt{49}$

b) $\sqrt[4]{32} . \sqrt[4]{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{15}}$

d) $\sqrt[7]{3^5} . \sqrt[14]{3^4}$

e) $\dfrac{\sqrt[\frac{1}{3}]{7^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{5^3} . \sqrt{5}}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[4]{2^{17}}}}$

g) $\sqrt{32^{-2}}$

h) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^5}}$

i) $\sqrt[7]{7^6} . \sqrt{7^{\frac{2}{7}}}$

j) $\dfrac{\sqrt[7]{45+83}}{\sqrt[3]{7}}$

k) $\sqrt{\left(\dfrac{34}{2}.\dfrac{4}{17}\right)^{\frac{4}{3}}}$

l) $\sqrt[3]{5^{14}.7^{2}.10^{3}}$

E2. Transforme os expoentes em raízes, simplifique as operações e, se necessário, efetue a racionalização

a) $\dfrac{(12-4)^{-\frac{1}{2}}}{3^{-2}}$

b) $\dfrac{(12^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{2}})^{-1}}{2^{-3}}$

c) $(2+5^{\frac{1}{2}})^{-1}.3$

d) $(3^{\frac{1}{2}}-4^{\frac{1}{2}})^{-1}.4^{\frac{1}{3}}$

e) $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}+3}\cdot\dfrac{3-\ 2^{\frac{1}{2}}}{1-4^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{4+2^{\frac{1}{2}}}{7(1-2^{\frac{1}{2}})}$

f) $12^{\frac{1}{2}}-(2^{\frac{7}{3}}+\ 5^{\frac{3}{5}})$

g) $144^{\frac{1}{2}}-\ (\sqrt[3]{8}.\sqrt{81})$

h) $\dfrac{3}{2^{-\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}}+7)}+\dfrac{4}{(2^{\frac{1}{2}})^{5}-4}$

i) $\dfrac{\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{6}+2}{2^{\frac{6}{5}}-8}-\dfrac{66.2^{-2}}{\left(2^{-\frac{2}{5}}\right)^{2}-2}$

j) $\left(\sqrt{16}+12^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

k) $\dfrac{2-2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-2\cdot\left(-2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{2}{3}}\right)\right)}{4}$

l) $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$

Gabarito

E1.

a) 9

b) $2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d)3

e) $\frac{7^2}{25}$

f) $2\sqrt[16]{2}$

g) $\frac{1}{32}$

h) $\sqrt[3]{3}$

i) 7

j) $2/\sqrt[3]{7}$

k) $2^{\frac{4}{3}}$

l) $5^4\sqrt[3]{25}.\sqrt[3]{49}.10$

E2.

a) $9\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $2\sqrt{3}-2$

c) $3(\sqrt{5}-2)$

d) $-\sqrt[3]{4}(\sqrt{3}+2)$

e) 1

f) $2\sqrt{3}-4\sqrt[3]{2}+\ \sqrt[5]{5^3}$

g) -6

h) $\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}-7)}{-47}+\sqrt{2}+1$

i) $2^{\frac{6}{5}}+8$

j) $\frac{(4-\sqrt{12})\sqrt{4+\sqrt{12}}}{4}$

k) $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$

l) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$

MÓDULO 4

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$-14 + \{-[4(-2) + (-5039)]\} = ?$$

$$3 \cdot \{2^2 \cdot [(3 + 2 \cdot 3) \cdot (3^3 + 3) - 4^2 \cdot (5 \cdot 2^2)]\} \ = ?$$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 4 (EXPRESSÕES NUMÉRICAS)**

Teoria e Exemplos

1.EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Expressão numérica é uma sequência de operações que devem obedecer as seguintes ordens de operação:

1: Potenciacão, radiciação e outras funções;

2: Multiplicação e divisão;

3: Adição e subtração.

Exemplo 1:

$$3 + 3 \cdot 5 = 3 + 15 = \boxed{18}$$

Exemplo 2:

$$1 + 2 \cdot 3 \cdot 3^2 - 1 + 3^2 \cdot 2^2 = 6 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 54 + 36 = \boxed{90}$$

Expressões numéricas que possuam parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }, resolvemos de dentro para fora, ou seja, efetuamos primeiro os parênteses, depois os colchetes e, por último, as chaves respeitando as prioridades de operações. Veja:

Exemplo 3:

$$(3^2 + 5^2) \cdot 5 + 7^2 \cdot 2 = (9 + 25) \cdot 5 + 49 \cdot 2 = 34 \cdot 5 + 98 = 170 + 98 = \boxed{268}$$

Exemplo 4:

$$3 \cdot \{2^2 \cdot [(3 + 2 \cdot 3) \cdot (3^3 + 3) - 4^2 \cdot (5 \cdot 2^2)]\} = 3 \cdot \{4 \cdot [(3 + 6) \cdot (30) - 16(5 \cdot 4)]\} =$$

$$= 3 \cdot \{4[270 - 360]\} = 3 \cdot \{4[-90] = 3 \cdot \{-360\} = \boxed{1080}$$

Exercícios

E1. Resolva as expressões seguintes:

a) $-14 + \{-[4(-2) + (-5039)]\}$

b) $41 + \{5 - [14 + (-17 + 28)] - 1\}$

c) $[-20 \cdot (4 - 9)] : (-5)$

d) $16 + 18 : (-9)$

e) $-(-5) + (12) – (-22)$

f) $12 + (+22) – (13) – (-12)$

g) $45 - [-(2 - 5) - (-4 - 5 - 6)$

h) $\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$

i) $-(-25) . (-13) + (-20)$

j)

k) $(2^2 - 2^3)$

l) $[-2^2(3 \cdot 3)](-1)$

m)
$$\frac{(2^2+5)^1}{3}$$
$$[(2\cdot 3)(-3^2)](-1)+5^2$$

n)
$$2\cdot\frac{[4\cdot 5(-4)]^1}{2}$$

o)
$$(-5)^2\cdot\left(\frac{1}{25}\right)-(3+2+4^2)$$

Gabarito

E1.

a) 5033

b) 20

c) -20

d) 14

e) 39

f) 33

g) 27

h) $\frac{3}{4}$

i) -345

j) 3

k) -4

l) 36

m) 79

n) -80

o) -20

MÓDULO 5

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$(60x^{80}y^{8}) \cdot (2x^{3}y) \ = ?$$

$$m^2p^3 - 5m^3p + 4m^2p^3 + 3m^3p - 5m^2p^3 = ?$$

1. EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Expressões algébricas são expressões que contém letras, números inteiros e operações. As letras que aparecem nas expressões são chamadas de variáveis.

Exemplo 1:

$$a = 4b + 3b + 7c$$

Do mesmo modo que vimos no Módulo 4 para as expressões numéricas, nas expressões algébricas devemos obedecer a uma ordem para as operações:

1: Potenciacão, radiciação e outras funções;

2: Multiplicação e divisão;

3: Adição e subtração.

E também devemos seguir a uma ordem para os sinais de associação:

1: Parênteses ( );

2: Colchetes [ ];

3: Chaves { }.

Exemplo 2:

$$8a \cdot (2+8) - 3a = 8a \cdot (10) - 3a = 80a - 3a = \boxed{77a}$$

A) POTENCIAÇÃO

Para resolver potências literais, devemos aplicar as mesmas regras estudadas no Módulo 2, contudo, devemos simplificar os expoentes numéricos. Veja

Exemplo 1:

$$(4x^2y)^3 = 4^3(x^2)^3(y)^3 = 4^3x^{2\cdot 3}y^3 = \boxed{64\,x^6y^3}$$

Exemplo 2:

$$(-2x^3y^4)^3 = (-2)^3(x^3)^3(y^4)^3 = \boxed{-8x^9y^{12}}$$

B) MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Para efetuarmos multiplicações em expressões algébricas, devemos multiplicar os valores numéricos, observando os sinais, e multiplicar as variáveis de mesma base somando seus expoentes.

Exemplo 1:

$$-(4x^2y)\cdot(-2xy) = \boxed{8x^3y^2}$$

Já a divisão, devemos dividir os valores numéricos, observando os sinais, e dividir as variáveis conservando a base e subtraindo os expoentes.

Exemplo 2:

$$\frac{4x^2y^3}{2xy} = \boxed{2xy^2}$$

Exemplo 3:

$$\frac{-4x^2y^3}{6x^5y} = -\frac{2}{3}x^{2-5}y^{3-1} = \boxed{-\frac{2}{3}x^{-3}y^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{-\frac{2y^2}{3x^3}}$$

C) ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Para somar ou subtrair os integrantes de expressões algébricas, devemos identificar parcelas que possuem o mesmo produto de potência de variáveis e realizar as operações, isto é, $7x$ pode ser somado com $3x$; $4x^2$ pode ser somado com $3x^2$; $2x^5y^2$ pode ser somado com $6x^5y^2$; mas, $2xy^2$ não pode ser somado com $3x^2y^2$. Veja:

Exemplo 1:

$$7x + 3x + 5y = (7+3)x + 5y = \boxed{10x + 5y}$$

Exemplo 2:

$$2x - 4x^2 + y + 2xy + x + 1 + x^2 + 3y + 5xy - 7$$

$$(2+1)x + (-4+1)x^2 + (1+3)y + (2+5)xy + (1-7)$$

$$\boxed{3x - 3x^2 + 4y + 7xy - 6}$$

Exercícios

E1. Simplifique as expressões algébricas:

a) $2x + 3x + 8x$

b) $10x^3 + 5x^2 + 5x^2 - 10x^3$

c) $4x^2x^3 + 5x^5$

d) $2x\cdot(5x^3 + 9x)$

e) $(60x^{80}y^8)\cdot(2x^3y)$

f) $xy^{\frac{1}{2}}\cdot(2xy^4 + y^2)$

g) $(2x^2)^3 + 2xy \cdot [4x+5]^2$

h) $((((x)^2)^3)^5)^2$

i) $\dfrac{(x^{1/2}y)^2}{y^2}$

j) $\dfrac{(\sqrt{z}w)^2}{zw^2}$

k) $\{2x(35xyw)(x^2)\} \cdot \{6xw(y)\}$

l) $\dfrac{\{x^{300} \cdot [yw\left(y^{\frac{3}{2}}\right)]\}}{2(y^2 \cdot y^2)^{\frac{1}{4}} + \{-y[(wx)^2/(w^2x^2)]\}}$

m) $[3(x^2y) \cdot (x^2y)]: (x^2y^2)$

n) $m^2p^3 - 5m^3p + 4m^2p^3 + 3m^3p - 5m^2p^3$

Gabarito

E1.

a) $13x$

b) $10x^2$

c) $9x^5$

d) $10x^4 + 18x^2$

e) $120x^{83}y^9$

f) $2x^2y^{\frac{9}{2}} + xy^{\frac{5}{2}}$

g) $8x^6 + 50xy + 80x^2y + 32x^3y$

h) x^{60}

i) x

j) 1

k) $420w^2x^5y^2$

l) $x^{300}y^{3/2}w$

m) $3x^2$

n) $-2m^3p$

MÓDULO 6

FATORAÇÃO

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

Escreva as expressões seguintes na forma fatorada:

$$18x - 24x^2 - 36xy$$

$$x^2 + 6x + 9$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc$$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 6 (FATORAÇÃO)**

Teoria e Exemplos

1. FATORAÇÃO

A fatoração é a decomposição de uma expressão algébrica em um produto de outras expressões, as quais multiplicadas retomam àquela original. Existem alguns tipos comuns de fatoração de expressões algébricas que serão exemplificadas abaixo.

A) FATOR COMUM EM EVIDÊNCIA

Em expressões algébricas que possuem em cada um de seus termos um mesmo fator, é possível colocá-lo em evidência.

Exemplo 1:

$$8x^2 + 4xy^2 = 4x \cdot 2x + 4x \cdot y^2 = \boxed{4x(2x + y^2)}$$

Exemplo 2:

$$12ax^2z - 4axz^2 + 36xa^2z = 4axz \cdot 3x - 4axz \cdot z + 4axz \cdot 9a = \boxed{4axz(3x - z + 9a)}$$

B) AGRUPAMENTO

Consiste em aplicar o caso do fator comum duas, ou mais, vezes em algumas expressões especiais.

Exemplo 1:

$$2az - 2a - bz + b = 2a \cdot z - 2a \cdot 1 - b \cdot z + b \cdot 1 = 2a(z - 1) - b(z - 1)$$

$$= \boxed{(2a - b) \cdot (z - 1)}$$

Exemplo 2:

$$3a - 3b - a^3 + a^2b = 3 \cdot a - 3 \cdot b - a^2 \cdot a + a^2 \cdot b = 3(a - b) - a^2(a - b)$$

$$= \boxed{(3 - a^2) \cdot (a - b)}$$

C) DIFERENÇA DE QUADRADOS

Expressões algébricas na forma $a^2 - b^2$ são fatoradas na forma $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Exemplo 1:

Efetuando o produto entre as expressões $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ e $\mathrm{a} - \mathrm{b}$, tem-se

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2$$

como $a \cdot b = b \cdot a$, então

$$= \boxed{a^2 - b^2}$$

Exemplo 2:

$$a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = \boxed{(a+2)\cdot(a-2)}$$

Exemplo 3:

$$3 - (xy)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - (xy)^2 = \boxed{(\sqrt{3} + xy)\cdot(\sqrt{3} - xy)}$$

Exemplo 4:

$$16y^4 - z^4 = (4y^2 + z^2)(4y^2 - z^2) = \boxed{(4y^2 + z^2)\cdot(2y - z)\cdot(2y + z)}$$

D) QUADRADO PERFEITO

Expressões algébricas na forma $a^2 \pm 2\cdot a\cdot b + b^2$ são fatoradas na forma $(a \pm b)^2$.

Exemplo 1:

Efetuando o produto entre as expressões $a + b$e $a + b$, tem-se

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2$$

como $a\cdot b = b\cdot a$, segue que

$$(a+b)^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

Exemplo 2:

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 = \boxed{(x-2)^2}$$

Exemplo 3:

$$2x^2 - 6\sqrt{2}xa^2 + 9a^4 = \left(\sqrt{2}x\right)^2 - 2\cdot\left(\sqrt{2}x\right)\cdot(3a^2)^2 + (3a^2)^2 = \boxed{(\sqrt{2}x - 3a^2)^2}$$

Exemplo 4:

$$(6x - 2y)(72x^2 - 48xy + 8y^2) = 2(3x - y)\cdot 8(9x^2 - 6xy + y^2)$$

$$= 16(3x - y)(3x - y)^2 = \boxed{16(3x - y)^3}$$

E) TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

Expressões algébricas na forma $x^2 + (a+b)x + a\cdot b$ são fatoradas na forma $(x+a)(x+b)$.

Exemplo 1:

Efetuando o produto entre as expressões $x + a$ e $x + b$, tem-se

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + x\cdot b + a\cdot x + a\cdot b$$

como $x\cdot b = b\cdot x$, então é possível colocar x em evidência nas duas expressões intermediárias resultando em

$$\boxed{x^2 + (a+b)x + ab}$$

Exemplo 2:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - (1+1)x + 1 \cdot 1 = x^2 + [(-1) + (-1)]x + (-1) \cdot (-1)$$

$$= (x-1)(x-1) = \boxed{(x-1)^2}$$

Exemplo 3:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (2+3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + [(-2) + (-3)]x + (-2) \cdot (-3)$$

$$= \boxed{(x-2)(x-3)}$$

Exemplo 4:

$$(9 - y^2)(3y^2 + 21y + 36) = (3-y)(3+y).3(y^2 + 7y + 12)$$

$$= 3(3-y)(3+y)(y+3)(y+4) = \boxed{3(3-y)(y+4)(y+3)^2}$$

Exercícios

E1. Fatore as expressões seguintes:

a) $3x - 3y$

b) $12a + 36b - 144c$

c) $18x - 24x^2 - 36xy$

d) $ab + 2a - 3b - 6$

e) $xy + 3x + y + 3$

f) $ab + ay + bx + xy$

g) $4a^2 - 1$

h) $1 - x^2$

i) $x^2 - 9y^2$

j) $x^2 + 6x + 9$

k) $4a^2 - 12ab + 9b^2$

l) $4a^2 - 4abc + b^2c^2$

m) $x^2 + 5x + 4$

n) $x^2 + x - 6$

o) $a^2 - a - 12$

E2. Fatore as seguintes expressões:

a) $32a^4 - 16a^4b + 16a^3c^2$

b) $3\dfrac{z^4}{w} - 3\dfrac{z^2}{w} + 12\dfrac{z^3}{w}$

c) $4a^2\sqrt{c} + 20ba\sqrt{c} + 28a^3\dfrac{c^{3/2}}{a}$

d) $x^2 - 5x + zx - 5z$

e) $2b^2 + 2c^3 + ab^2 + ac^3$

f) $a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc$

g) $4 - 16z^2$

h) $a^8 - b^8$

i) $x^2 + y^2$

j) $5x^2 + 10x + 5$

k) $(4 - c^2)(c^2 - 4c + 4)$

l) $z^4 - 8w^2z^2 + 16w^4$

m) $s^2 + 8s + 15$

n) $(s - 3)(6s^2 + 12s - 90)$

o) $4s^4 + 16s^3 - 48s^2 - 128s + 256$

Gabarito

E1.

a) $3(x - y)$

b) $12(a + 3b - 12c)$

c) $6x(3 - 4x - 6y)$

d) $(a - 3)(b + 2)$

e) $(x + 1)(y + 3)$

f) $(a + x)(b + y)$

g) $(2a - 1)(2a + 1)$

h) $(1 - x)(1 + x)$

i) $(x + 3y)(x - 3y)$

j) $(x + 3)^2$

k) $(2a - 3b)^2$

l) $(2a - bc)^2$

m) $(x + 1)(x + 4)$

n) $(x - 2)(x + 3)$

o) $(a + 3)(a - 4)$

E2.

a) $16a^3(2a - ab + c^2)$

b) $3\frac{z^2}{w}(z^2 - 1 + 4z)$

c) $4a\sqrt{c}(a + 5b + 7ac)$

d) $(x - 5)(x + z)$

e) $(2 + a)(b^2 + c^3)$

f) $(a + b)(a + b + c)$

g) $(2 - 4z)(2 + 4z)$

h) $(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$

i) $\left(x + y + \sqrt{2xy}\right)(x + y - \sqrt{2xy})$

j) $5(x + 1)^2$

k) $-(c + 2)(c - 2)^3$

l) $(z + 2w)^2(z - 2w)^2$

m) $(s + 3)(s + 5)$

n) $6(s - 3)^2(s + 5)$

o) $4(s - 2)^2(s + 4)^2$

MÓDULO 7

NÚMEROS REAIS

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

Solução da inequação: $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{1-x}{4}$

Solução do sistema de inequações: $3 \leq x^2 - 2x + 8 < 8$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 7 (NÚMEROS REAIS)**

Teoria e Exemplos

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos são:

- Naturais: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6, \cdots\}$
- Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \cdots\}$
- Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ b \neq 0\right\}$
- Irracionais ($\mathbb{I}$): é o conjunto de todos os números que não podem ser representados como razão de números inteiros, por exemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{-5{,}2}$, π, $e = 2{,}7182818284 \cdots$ (constante de Napier ou número de Euler), $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (razão áurea), $\cdots$
- Reais ($\mathbb{R}$): é o conjunto formado por todos os números racionais e irracionais.

Os conjuntos numéricos formam a seguinte cadeia de inclusão:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Exemplo 1:

O número $0{,}2555 \cdots$ é um número racional, pois fazendo $x = 0{,}2555 \cdots$, então $10x = 2{,}5555 \cdots$. Considerando a diferença entre eles, tem-se

$$\begin{array}{r} 10x = 2{,}5555 \cdots \\ \underline{-\ \ x = 0{,}2555 \cdots} \\ 9x = 2{,}3 \end{array}$$

Logo,

$$9x = 2{,}3 = \frac{23}{10} \Rightarrow$$
$$x = \frac{23}{90}.$$

A) PROPRIEDADES

Os números reais possuem propriedades algébricas importantes: operacionais, ordem e completude. As propriedades algébricas operacionais estão relacionadas a capacidade de somar, subtrair, multiplicar e dividir números reais e assim produzir novos números reais. Algumas dessas conhecidas propriedades são:

- Comutatividade: $a \cdot b = b \cdot a$, $a + b = b + a$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$;
- Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, $a \pm (b \pm c) = (a \pm b) \pm c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- Distributividade: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$;
- Existência de elemento neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $0 \pm a = a \pm 0 = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

A ideia da completude está ligada ao fato da reta real ser uma linha contínua sem buracos nela com todos os números reais estando sobre ela representados. Finalmente, dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ então as propriedades de ordem são:

- Se $a < b$, então $a \pm c < b \pm c$;
- Se $a < b$ e $c > 0$, então $a \cdot c < b \cdot c$. Se $c < 0$, então $a \cdot c > b \cdot c$;
- Se $a > 0$, então $\frac{1}{a} > 0$;
- Se $a < b$ e ambos são positivos, ou negativos, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Exemplo 1:

Qual dos números $\sqrt[5]{4}$ ou $\sqrt[3]{2}$ é maior?
Temos que $mmc(3,5) = 15$, então reescrevendo os números dados verificamos que

$$\sqrt[5]{4} = 4^{1/5} = 4^{3/15} = (2^2)^{3/15} = 2^{6/15} = \sqrt[15]{2^6}$$

e

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{5/15} = \sqrt[15]{2^5}.$$

Como $2^6 > 2^5$, então $\sqrt[5]{4} > \sqrt[3]{2}$.

2. INTERVALOS

Intervalos são subconjuntos especiais da reta real. Ele são utilizados para representar todos os números reais que se encontram entre dois números ou símbolos pré-determinados.

As notações usadas para os diferentes tipos de intervalos:

Notação	**Intervalo**
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$

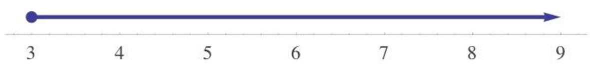
Os intervalos (a, b) e $[a, b]$ são chamados, respectivamente, de intervalo aberto e intervalo fechado.

Exemplo 1:

O intervalo $(2,4]$ é dado pelo conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$ e é representado graficamente por

Exemplo 2:

O intervalo $[3, \infty)$ é dado pelo conjunto de todos os reais maiores que 3, isto é, $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x\}$, e é representado graficamente por



3. INEQUAÇÕES

As desigualdades são parte importante da matemática. Inequações são relações nas quais se realizam comparações não-iguais entre dois números ou expressões algébricas. Nelas se utilizam os seguintes sinais em sua estrutura: $\neq, >, <, \geq, \leq$. As técnicas de resolução são semelhantes com as utilizadas nas equações, contudo, é importante ressaltar que as inequações respeitam as restrições as propriedades de ordem discutidas acima o que gera algumas regras operacionais para solução.

Ao final, os intervalos das soluções das inequações podem ser abertos, semi-abertos, fechados ou composição de conjuntos dessa forma.

Exemplo 1:

Resolva a inequação $-2x + 3 < 3x - 2$:

$$\begin{aligned}
&-2x + 3 < 3x - 2 \Longrightarrow \\
&-2x + 3 + 2x < 3x - 2 + 2x \Longrightarrow \text{ adicione } 2x \text{ em ambos os lados} \\
&\cancel{-2x} + 3 + 2x < 5x - 2 \Longrightarrow \\
&3 + 2 < 5x + \cancel{2} - \cancel{2} \Longrightarrow \text{ adicione 2 em ambos os lados} \\
&5 < 5x \Longrightarrow \\
&\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}} < \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}}x \Longrightarrow \text{ divida por 5 em ambos os lados} \\
&1 < x.
\end{aligned}$$

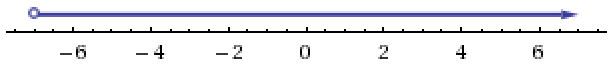
O conjunto solução é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = (1, \infty)$. Graficamente ele é representado pela figura abaixo, observado que o número 1 não faz parte do conjunto.

Exemplo 2:

Resolva a inequação $4x + 12 > 2x - 2$:

$$4x + 12 > 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2x > -2 - 12 \quad \Rightarrow$$
$$2x > -14 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{-14}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\boxed{x > -7}$$

Logo, na reta real a inequação é representada por um intervalo aberto:



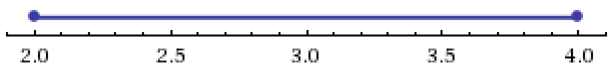
Ou seja, todos os números maiores que -7 são soluções da inequação, excluindo o -7, neste caso $S = (-7, \infty)$.

Exemplo 3:

Resolva a inequação $5 \leq x + 3 \leq 7$:

$$5 \leq x + 3 \leq 7 \;\Rightarrow$$
$$5 - 3 \leq x \leq 7 - 3 \;\Rightarrow$$
$$2 \leq x \leq 4$$

Logo,



A solução da inequação é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$, o que representa um intervalo fechado.

Exemplo 4:

Resolva a inequação $\frac{2}{2x-3} \geq 4$:

Inicialmente, é importante observar que neste caso para que a desigualdade seja respeitada é necessário que o número $2x-3>0$. Ele não pode ser nulo, caso contrário teríamos divisão por zero, o que não é possível dentro do conjunto dos números reais. Também não pode ser negativo, caso contrário a desigualdade seria automaticamente violada. Logo, para encontrarmos o conjunto solução fazemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{2x-3} \geq 4 \implies \\
&2 \geq 4\cdot(2x-3) \implies \text{ multiplique por } 2x-3 \text{ em ambos os lados} \\
&2 \geq 8x-12 \implies \\
&12+2 \geq 8x \implies \text{ adicione 12 em ambos os lados} \\
&14 \geq 8x \implies \\
&\frac{14}{8} \geq \frac{\cancel{8}}{\cancel{8}}x \implies \text{ divida por 8 em ambos os lados} \\
&7/4 \geq x.
\end{aligned}
$$

Como x deve ser tal que $7/4 \geq x$ e $x<3/2$, então o conjunto solução é dado por $S=\{x\in\mathbb{R} \mid 3/2<x\leq 7/4\}=(\frac{3}{2},\frac{7}{4}]$.

Exercícios

E1. Relacione usando $\in$ e $\notin$:

a) $\frac{2}{3}, \mathbb{Z}$ b) $-13, \mathbb{Q}$ c) $\frac{4}{11}, \mathbb{I}$

d) $0, \mathbb{I}$ e) $\sqrt[3]{343}, \mathbb{Q}$ f) $\sqrt{8}+\pi, \mathbb{R}$

E2. Escreva os números $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{2}$ em ordem crescente.

E3. Escreva os números $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt{8}$ e $\sqrt[3]{10}$ e em ordem decrescente.

E4. Determine a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) $0{,}7777\cdots$ b) $0{,}14444\cdots$ c) $2{,}30575757\cdots$

E5. Encontre as soluções das seguintes inequações:

a) $2x+1<0$ b) $2-3x>x+14$ c) $3(1-2x)<2(x+1)+x-7$

d) $[1-2(x-1)]<2$ e) $8(x+3)>12(1-x)$ f) $\frac{x}{3}-\frac{x+1}{2}<\frac{1-x}{4}$

g) $(x+3)(x-3)>0$ h) $(2x+1)(5-x)\leq 0$ i) $(-x+3)^4(5x-1)^3\leq 0$

Gabarito

E1.

a) $\frac{2}{3}\notin\mathbb{Z}$ b) $-13\in\mathbb{Q}$ c) $\frac{4}{11}\notin\mathbb{I}$

d) $0\notin\mathbb{I}$ e) $\sqrt[3]{343}\in\mathbb{Q}$ f) $\sqrt{8}+\pi\in\mathbb{R}$

E2. $\sqrt[4]{2}<\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$

E3. $\sqrt{8}>\sqrt[3]{10}>\sqrt[4]{4}$

E4.

a) $7/9$ b) $13/90$ c) $7609/3300$

E5.

a) $x < -\frac{1}{2}$ b) $x < -3$ c) $x > \frac{8}{9}$

d) $x > \frac{1}{2}$ e) $x > -\frac{3}{5}$ f) $x < 9$

g) $S = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ h) $S = (-\infty, -1/2] \cup [5, \infty)$ i) $S = (-\infty, 2] \cup \{3\}$

MÓDULO 8

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$\frac{48x^4 - 4x^3 + x - 1}{4x^3 + 1} = ?$$

$$\frac{(x-9)(x-2)(x+2)}{x-1} = ?$$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 8 (DIVISÃO DE POLINÔMIOS)**

Teoria e Exemplos

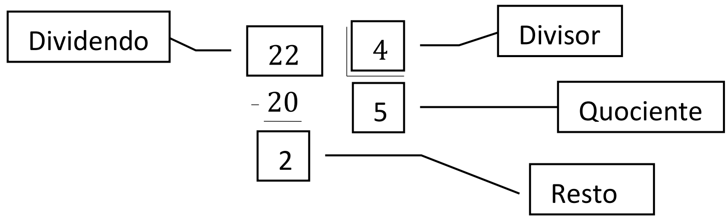
1. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Para exemplificarmos o processo de divisão de dois polinômios, começaremos com um exemplo da divisão de dois números inteiros positivos.

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r|l} 22 & \underline{4} \\ -\underline{20} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

Onde:



Note que o primeiro passo foi encontrar um número que ao multiplicar por 4 se aproxima de 22. O valor encontrado foi 5, que ao multiplicar por 4, resulta em 20. Contudo, colocamos esse resultado com sinal trocado, -20. Depois, efetuamos a operação $(22-20)$ que resulta em 2, que é o resto. Na divisão de polinômios fazemos passos bem parecidos como veremos mais adiante.

Na divisão entre dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$ aparecem os mesmos elementos:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & \underline{D(x)} \\ R(x) & Q(x) \end{array}$$

em que $P(x)$ é o dividendo, $D(x)$ é o divisor, $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é o resto da divisão. Do mesmo modo que podemos escrever $22 = 4 \cdot 5 + 2$, podemos escrever $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$. Veja algumas considerações importantes sobre a divisão de polinômios:

- O grau do dividendo deve ser sempre maior ou igual ao grau do divisor;
- O grau do resto será sempre menor que o grau do quociente;
- O grau do quociente será sempre o grau do dividendo menos o grau do divisor;
- Quando o dividendo for divisível pelo divisor, o resto será igual a zero.

Exemplo 2:

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & \underline{x^2 + 3x - 2} \end{array}$$

Note que o grau do dividendo, $2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$, é igual a 4 (maior expoente) e do divisor, $x^2 + 3x - 2$, é 2. Como o grau do dividendo é maior que o do divisor, podemos prosseguir com o processo de divisão de polinômios.

Para encontrarmos o primeiro termo do quociente, que será multiplicado pelo divisor, devemos dividir o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor: $2x^4 \div x^2 = 2x^2$. Logo em seguida, o resultado $2x^2$ será multiplicado pelo polinômio $(x^2 + 3x - 2)$.

O resultado dessa multiplicação deve ser subtraído pelo polinômio $(2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1)$, como pode ser visto abaixo:

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & \underline{|\,x^2 + 3x - 2} \\
-\ \underline{2x^4 + 6x^3 - 4x^2 } & 2x^2 \\
-5x^3 - 3x^2 + 9x - 1 &
\end{array}
$$

Utilizamos o polinômio resultante da etapa anterior para dividir o seu primeiro termo pelo dividendo: $-5x^3 \div x^2 = -5x$.

O resultado encontrado deverá ser multiplicado pelo divisor e subtraído do polinômio $(-5x^3 - 3x^2 + 9x - 1)$:

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & \underline{|\,x^2 + 3x - 2} \\
-\ \underline{2x^4 + 6x^3 - 4x^2 } & 2x^2 - 5x \\
-5x^3 - 3x^2 + 9x - 1 & \\
-\ \underline{-5x^3 - 15x^2 + 10x } & \\
12x^2 - x - 1 &
\end{array}
$$

Adotando o mesmo raciocínio e seguindo os mesmo passos chegamos ao final da divisão:

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 & \underline{|\,x^2 + 3x - 2} \\
-\ \underline{2x^4 + 6x^3 - 4x^2 } & 2x^2 - 5x + 12 \\
-5x^3 - 3x^2 + 9x - 1 & \\
-\ \underline{-5x^3 - 15x^2 + 10x } & \\
12x^2 - x - 1 & \\
-\ \underline{12x^2 + 36x - 24} & \\
-37x + 23 &
\end{array}
$$

Logo, a divisão do polinômio $2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ pelo polinômio $x^2 + 3x - 2$ é igual a $2x^2 - 5x + 12$ com resto $-37x + 23$. Podemos escrever:

$$\boxed{2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = (x^2 + 3x - 2)(2x^2 - 5x + 12) + (-37x + 23)}$$

ou então:

$$\boxed{\frac{2x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1}{x^2 + 3x - 2} = 2x^2 - 5x + 12 + \frac{-37x + 23}{x^2 + 3x - 2}}$$

Veja outros exemplos de divisão de polinômios:

Exemplo 3:

$$
\begin{array}{rl}
10x^2 + 4x - 7 & \underline{|\,2x - 2} \\
\underline{-(10x^2 - 10x)} & 5x - 3 \\
-6x - 7 & \\
\underline{-(-6x + 6)} & \\
-13 &
\end{array}
$$

Exemplo 4:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -(x^3 + \ \ x^2 - 2x) & x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^2 - 3x + 2 & \\ -(-3x^2 - 3x + 6) & \\ \cline{1-1} -4 & \end{array}$$

Uma boa dica para facilitar a divisão de polinômios é escrever o polinômio do maior para o menor expoente completando com coeficientes nulos os termos inexistentes. Veja:

Exemplo 5:

$$\frac{10x^4 - 2x + 1}{x^2 - 2} = \frac{10x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1}{x^2 + 0x - 2}$$

O processo de divisão fica assim:

$$\begin{array}{r|l} 10x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x + 1 & x^2 + 0x - 2 \\ \cline{2-2} -(10x^4 + 0x^3 - 20x^2) & 10x^2 + 20 \\ \cline{1-1} 20x^2 - 2x + 1 & \\ -(20x^2 + 0x - 40) & \\ \cline{1-1} 41 & \end{array}$$

Exercícios

E1. Faça as divisões:

a) $\dfrac{x^2 + x^3 + 2x}{x^2}$

b) $\dfrac{3x^3 - 7x^2 + 14x - 12}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2}$

d) $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^2 - 3}$

e) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 1}$

f) $\dfrac{4x^9 + 7x^6 + 4x^3 + 3}{x^3 + 1}$

g) $\dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

h) $\dfrac{2x^4 + 5x^3 - 12x + 7}{x^2 - 1}$

i) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x^2 - 3x + 1}$

j) $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 - 4}$

k) $\dfrac{150x^3 - 10x^2}{5x^2}$

l) $\dfrac{48x^4 - 4x^3 + x - 1}{4x^3 + 1}$

E2. Faça as divisões:

a) $\dfrac{(4x-1)(x-4)(x+2)}{x-3}$

b) $\dfrac{2(x-1)(x-5)(x+2)}{x-3}$

c) $\dfrac{(x-3)(x-2)(x+2)}{x-4}$

d)

e)

f)

g) $\dfrac{\dfrac{(x-9)(x-2)(x+2)}{x-1}}{\dfrac{(2x-3)(2x-2)(2x+2)}{x-3}}$

h) $\dfrac{\dfrac{4(2x-3)(x-2)(x+2)}{x-1}}{\dfrac{(2x-3)(2x-2)(2x+2)}{x-1}}$

i) $\dfrac{\dfrac{(2x-3)(x-2)(x+2)}{x-1}}{\dfrac{x^{15}+5x^2+x-20}{x^3+2}}$

j) $\dfrac{3y^3+6y^2}{3y^2+3}$

k) $\dfrac{12x^2-8x}{2x+1}$

l) $\dfrac{-18x^2+6x}{2x+3}$

Gabarito

E1.

a) $1+x+\dfrac{2}{x}$

b) $3x-7+\dfrac{26x-40}{x^2-4}$

c) $3x+1+\dfrac{-4x-1}{x^2-x+2}$

d) $x-7+\dfrac{19x-33}{x^2-3}$

e) $1+\dfrac{-3x^2+3x}{x^3-1}$

f) $4x^3+7x^2+\dfrac{7x^2+3}{x^3+1}$

g) $x^2+1+\dfrac{1}{x^2-1}$

h) $2x^2+5x+2+\dfrac{-7x+9}{x^2-1}$

i) $x-2$

j) $3x-2+\dfrac{12x-4}{x^2-4}$

k) $30x-2$

l) $12x-1+\dfrac{-11x}{4x^3+1}$

E2.

a) $4x^2+3x-21+\dfrac{-55}{x-3}$

b) $2x^2-2x-20+\dfrac{-40}{x-3}$

c) $x^2+x+\dfrac{12}{x-4}$

d) $x^2-8x-12+\dfrac{24}{x-1}$

e) $8x^2-4x-36+\dfrac{12}{x-1}$

f) $2x^2-x-9+\dfrac{3}{x-1}$

g) $8x^2-12x+28+\dfrac{96}{x-3}$

h) $8x^2-4x-12$

i) $x^{12}-2x^9+4x^6-8x^3+16+\dfrac{-52+x+5x^2}{x^3+2}$

j) $y+2+\dfrac{-3y-6}{3y^2+3}$

k) $6x-7+\dfrac{7}{2x+1}$

l) $\dfrac{33}{2}-9x-\dfrac{99/2}{2x+3}$

MÓDULO 9

FUNÇÕES POLINOMIAIS

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

Quanto vale $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ para $x = 1$ e $x = 2$?

Resolva: $x^2 - 14x + 48 = 0$

Resolva: $-x^4 + 113x^2 - 3136 = 0$

PLAY CÁLCULO – **MÓDULO 9 (FUNÇÕES POLINOMIAIS)**

Teoria e Exemplos

1. POLINÔMIOS

Um polinômio ou função polinomial P, na variável x, é toda expressão do tipo:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

em que a_0, a_1, ... a_n são números reais, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1:

$$P(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 2$$

Exemplo 2:

$$P(x) = 3x^2 + 3x + 3$$

Não são polinômios as expressões que contenham a variável com expoentes negativos ou fracionários, por exemplo:

Exemplo 3:

$$P(x) = x^{-3} + x - 1$$

A) VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio e α um numero real qualquer, então o valor numérico do polinômio P no ponto $x = \alpha$ é obtido substituindo x por α na expressão que define $P(x)$, veja:

Exemplo 1:

Os valores numéricos do polinômio $P(x) = x^2 + 3x + 1$ nos pontos $x = 1$ e $x = 2$ são respectivamente:

$$P(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$P(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 11$$

B) GRAU DO POLINÔMIO

O grau de um polinômio $P(x)$ é o maior expoente da variável, com o coeficiente não nulo, que aparece na representação do polinômio $P(x)$.

Exemplo 1:

$$P(x) = 3x^5 + 4x^4 - 7x^2 + 3x + 2$$

O grau desse polinômio é cinco.

Exemplo 2:

$$P(x) = 7x^3 + 6x^2 - 12$$

O grau desse polinômio é três.

C) RAÍZES DO POLINÔMIO

Quando ocorrer $P(\alpha) = 0$, dizemos que o número α é uma raiz ou um zero do polinômio P.

Exemplo 1:

Considerando

$$P(x) = x^4 - 16$$

Observa-se que as raízes do polinômio são -2 e 2, pois $P(-2) = P(2) = 0$, veja:

$$P(2) = 2^4 - 16 = 16 - 16 = 0$$

$$P(-2) = (-2)^4 - 16 = 16 - 16 = 0$$

D) RAÍZ DO POLINÔMIO DE 1° GRAU

Para encontrar a raiz de um polinômio de 1°, basta igualar o polinômio a 0 e isolar a variável. Veja:

Exemplo 1:

Considerando

$$P(x) = 5x - 10,$$

então fazendo $P(x) = 0$, tem-se

$$5x - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$5x = 10 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{10}{2} = 5}$$

E) RAÍZES DO POLINÔMIO DE 2° GRAU

Para encontrar as raízes dos polinômios de 2° grau $P(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, podemos utilizar a fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \text{sendo } \Delta = b^2 - 4ac.$$

O valor de Δ identifica o número de raízes reais do polinômio: a) se $\Delta = 0$, existem duas raízes reais iguais; se $\Delta > 0$, existem duas raízes reais diferentes; e se $\Delta < 0$, o polinômio não possui nenhuma raiz real.

Exemplo 1:

Considerando

$$P(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

Nesse caso, temos $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$. Com esses valores encontramos o valor de Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

Depois substituímos o valor do Δ na fórmula de Bháskara e encontramos as duas raízes do polinômio:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

As duas raízes, x_1 e x_2, são:

$$\boxed{x_1 = \frac{3+1}{2} = 2} \quad \text{e} \quad \boxed{x_1 = \frac{3-1}{2} = 1}$$

Sempre que encontrar raízes, você pode conferir o resultado substituindo os valores no polinômio, veja:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$P(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$P(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$

Exemplo 2:

$$P(x) = -x^2 + 2x - 2 = 0$$

Encontrando o Δ com base em $a = -1$, $b = 2$ e $c = -2$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 0$$

Como $\Delta = 0$, o polinômio possui duas raízes reais iguais. Para encontrá-las utilizamos Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)}$$

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-2}{-2} = 1}$$

F) RAÍZES DO POLINÔMIO DE 2° GRAU (CASOS ESPECIAIS)

Em qualquer problema de raízes de polinômio de 2° grau podemos utilizar a fórmula de Bháskara, contudo, o desafio de encontrar as raízes é facilitado se $b = 0$ ou $c = 0$.

No caso de $b = 0$, basta isolarmos a variável. Veja:

Exemplo 1:

$$P(x) = 2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

As raízes são

$$\boxed{x_1 = -3} \quad \text{e} \quad \boxed{x_2 = 3}$$

No caso de $c = 0$, uma das raízes será sempre igual a 0. Para encontrar a outra, colocamos a variável e o seu coeficiente em evidência (essa é uma das técnicas de fatoração e será vista em maior detalhes no módulo 8). Veja:

Exemplo 2:

$$P(x) = 2x^2 - 6x = 0$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x \cdot (x - 3) = 0$$

Para o produto entre $2x$ e $x - 3$ ser igual a 0, basta que um dos dois seja igual a 0. Sendo assim, fazemos:

$$2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

Sendo assim, as raízes são $\boxed{x_1 = 0}$ e $\boxed{x_2 = 3}$.

Exercícios

E1. Encontre os valores numéricos para os seguintes polinômios nos pontos $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$:

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ b) $P(x) = x^2 - 2x + 5$ c) $P(x) = x^3 - 4x^2 + x$

d) $P(x) = x^5 - x^4 + 3x$ e) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ f) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$

E2. Encontre as raízes dos polinômios de primeiro grau:

a) $2x - 6 = 0$ b) $x + 12 = 0$ c) $-3x + 6 = 0$

d) $6x + 2 = 0$ e) $-14x + 7 = 0$ f) $12 - 5x = 0$

E3. Encontre as raízes dos polinômios, observando a existência de casos especiais:

a) $x^2+2x-3=0$ b) $2x^2-10x+12=0$ c) $5x^2-3x-2=0$

d) $(2x+5)^2+3x-25=0$ e) $x^2-14x+48=0$ f) $x^2-6x=0$

g) $x^2-10x+25=0$ h) $x^2-x-20=0$ i) $x^2-8x+7=0$

j) $(x+2)\cdot(x-1)=0$ k) $(x+3)\cdot(x-1)=0$ l) $x^2-3x-4=0$

m) $3x^2-36=0$ n) $4x^2-16=0$ o) $-x^4+113x^2-3136=0$

Gabarito

E1.

a) $P(0)=1, P(1)=3, P(2)=17$

b) $P(0)=5, P(1)=4, P(2)=5$

c) $P(0)=0, P(1)=-2, P(2)=-6$

d) $P(0)=0, P(1)=3, P(2)=22$

e) $P(0)=2, P(1)=1, P(2)=6$

f) $P(0)=1, P(1)=2, P(2)=33$

E2.

a) $x=3$

b) $x=-12$

c) $x=2$

d) $x=-\frac{1}{3}$

e) $x=\frac{1}{2}$

f) $x=\frac{12}{5}$

E3.

a) $x_1=-3,\ \ x_2=1$

b) $x_1=3,\ \ x_2=2$

c) $x_1=1,\ \ x_2=-\frac{2}{5}$

d) $x_1=0,\ \ x_2=-\frac{23}{4}$

e) $x_1=8,\ \ x_2=6$

f) $x_1=0,\ \ x_2=6$

g) $x_1=x_2=5$

h) $x_1=5,\ \ x_2=-4$

i) $x_1=7,\ \ x_2=1$

j) $x_1=-2,\ \ x_2=1$

k) $x_1=-3,\ \ x_2=1$

l) $x_1=4,\ \ x_2=-1$

m) $x_1=\sqrt{12},\ \ x_2=-\sqrt{12}$

n) $x_1=2,\ \ x_2=-2$

o) $x_1=7, x_2=-7, x_3=8, x_4=-8$

MÓDULO 10

FUNÇÕES RACIONAIS

EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE SERÃO RESOLVIDOS NESTE MÓDULO:

$$\frac{1}{x+7}+\frac{5x}{x+3}=?$$

$$\frac{x^3-2}{x+1}-\frac{5x^3+2}{x^2-x-2}=?$$

$$\frac{x-3}{x^2-16}\cdot\frac{x+4}{x-3}=?$$

Teoria e Exemplos

1. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

A) MESMO DENOMINADOR

Em expressões com o mesmo denominador, faz-se do mesmo modo com a soma de frações. Desse modo, basta repetir o denominador e somar (ou subtrair) os numeradores, veja:

Exemplo 1:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x-1}{x+1}=\frac{(x)+(2x-1)}{x+1}=\frac{x+2x-1}{x+1}=\boxed{\frac{3x-1}{x+1}}$$

Exemplo 2:

$$\frac{3x+1}{x^2-4}-\frac{x^2-x+3}{x^2-4}=\frac{(3x+1)-(x^2-x+3)}{x^2-4}=\frac{3x+1-x^2+x-3}{x^2-4}=\boxed{\frac{-x^2+4x-2}{x^2-4}}$$

B) DENOMINADORES DIFERENTES

No caso de denominadores diferentes, deve-se encontrar um polinômio (em forma fatorada ou não) que seja divisível pelos denominadores originais das funções que serão somadas (ou subtraídas). Uma forma fácil de encontrar esse polinômio é multiplicar os polinômios dos denominadores, veja:

Exemplo 1:

$$\frac{7x}{x+1}+\frac{2x-5}{x-3}=\frac{?}{(x+1)(x-3)}$$

Após encontrado o denominador, deve-se fazer a operação com os numeradores. Para isso, deve-se dividir o polinômio encontrado $(x+1)(x-3)$ pelo denominador original $(x+1)$ e multiplicar pelo numerador $(7x)$. Faça o mesmo com a segunda fração. O resultado é o seguinte:

$$\frac{7x}{x+1}+\frac{2x-5}{x^2-1}=\frac{(7x)(x-3)+(2x-5)(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\frac{7x^2-21x+2x^2+2x-5x-5}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=\boxed{\frac{9x^2-19x-5}{(x+1)(x-3)}}$$

É possível encontrar fatores em comum nos denominadores, veja:

Exemplo 2:

$$\frac{x}{x^2-4}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+1}{x-2}$$

Desse modo, fica mais fácil encontrar o resultado final que é o seguinte:

$$\frac{x}{x^2-4}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}-\frac{x+3}{x-2}=\frac{x\cdot 1-(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-(x^2+2x+3x+6)}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{x-x^2-2x-3x-6}{(x-2)(x+2)}=\frac{-x^2-4x-6}{(x-2)(x+2)}=\boxed{\frac{-x^2-4x-6}{x^2-4}}$$

2. PRODUTO E QUOCIENTE DE FUNÇÕES RACIONAIS

Basta seguir as mesmas regras utilizadas para operações com frações (estudada no Módulo 1).

Exemplo 1:

$$\frac{5x}{x^2-1}\cdot\frac{x+3}{x+2}=\frac{(5x)(x+3)}{(x^2-1)(x+2)}=\boxed{\frac{5x^2+15x}{x^3+2x^2-x-2}}$$

Em alguns casos é possível simplificar antes de realizar a operação, veja:

Exemplo 2:

$$\frac{5x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{x+2}=\frac{5x}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{\cancel{(x+1)}}{x+2}=\frac{5x}{(x-1)(x+2)}=\boxed{\frac{5x}{x^2+x-2}}$$

Exemplo 3:

$$\frac{\frac{2x}{x^2-4}}{\frac{5x}{x^2+x-2}}=\frac{2x}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+x-2}{5x}=\frac{2\cancel{x}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{5\cancel{x}}=\frac{2(x-1)}{5(x-2)}=\boxed{\frac{2x-2}{5x-10}}$$

Exercícios

E1. Faça as operações seguintes:

a) $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{5x}{x+7}$

b) $\dfrac{6x-3}{2x+17}+\dfrac{1-5x}{2x+17}$

c) $\dfrac{4x^3-12x+1}{x+1}-\dfrac{5x^3-15x+2}{x+1}$

d) $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{5x}{x+3}$

e) $\dfrac{3}{x+5}-\dfrac{x}{2x-1}$

f) $\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{x+2}{3x+5}$

g) $\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{x^3+2}{x+1}$

h) $\dfrac{6x-3}{x+5}+\dfrac{1-5x}{2x-1}$

i) $\dfrac{x^3-2}{x+1}-\dfrac{5x^3+2}{x^2-x-2}$

j) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3x-2}{x+1}+\dfrac{5}{x}$

k) $\dfrac{5}{x-5}-\dfrac{3x-2}{x+1}+2$

l) $\dfrac{3}{2x+2}+\dfrac{x-6}{x+1}-3$

E2. Faça as operações seguintes:

a) $\dfrac{1}{x+7} \cdot \dfrac{5x}{x+7}$

b) $\dfrac{6x-3}{3x+2} \cdot \dfrac{1-5x}{3x+1}$

c) $\dfrac{x^3+1}{x+1} \cdot \dfrac{5x^4-2}{x-1}$

d) $\dfrac{x-3}{x^2-16} \cdot \dfrac{x+4}{x-3}$

e) $\dfrac{3}{3x+1} \cdot \dfrac{x+1}{x-1}$

f) $\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \dfrac{x-1}{x}$

g) $(x+1)\ \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{x-2}{2-x}$

h) $\dfrac{(x-2)\cdot(4x-12)}{x-3} \cdot \dfrac{x}{x-1}$

i) $\dfrac{x^3-2}{x^2+1} - \dfrac{5x^3+2}{x+1}$

j) $\dfrac{\frac{x+1}{x-2}+1}{x+1} \cdot \dfrac{3}{x+1}$

k) $\dfrac{\big(x-2\cdot\big(x-2\cdot(x-2)\big)\big)}{x-2} + 1$

l) $\dfrac{\frac{x^2-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x+3}}{x-1} + \dfrac{1}{x}$

Gabarito

E1.

a) $\dfrac{5x+1}{x+7}$

b) $\dfrac{x-2}{2x+17}$

c) $\dfrac{-x^3+3x-1}{x+1}$

d) $\dfrac{5x^2+36x+3}{x^2+10x+21}$

e) $\dfrac{-x^2+x-3}{2x^2+9x-5}$

f) $\dfrac{8x^2+12x-2}{3x^2+8x+5}$

g) $\dfrac{x^4-x^3+5x-2}{x^2-1}$

h) $\dfrac{7x^2-36x+8}{2x^2+9x-5}$

i) $\dfrac{x^4-7x^3-2x+2}{x^2-x-2}$

j) $\dfrac{3x^3-2x^2-10}{x(x-2)(x+1)}$

k) $\dfrac{-3x^2+2x^2+14x-15}{x^2-4x-5}$

l) $-\dfrac{x+7}{x+1}$

E2.

a) $\dfrac{5x}{(x+7)^2}$

b) $-3 \cdot \dfrac{10x^2-7x+1}{9x^2+9x+2}$

c) $\dfrac{5x^7+5x^4-2x^3-2}{x^2-1}$

d) $x-4$

e) $\dfrac{3x+3}{3x^2-2x-1}$

f) $\dfrac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$

g)

h)

i)

$$\frac{x^3+x^2-x-3}{x(x+3)}$$

$$\frac{4x^2-4x}{x-1}$$

$$\frac{-5x^5+x^4-4x^3-2x^2-2x-4}{(x^2+1)(x+1)}$$

j)
$$\frac{6x-3}{(x-2)(x+1)^2}$$

k)
$$\frac{4x-10}{x-2}$$

l)
$$\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x^2+3x}$$